الوحدة الأولى : الدوال الحقيقية

تعريف الدالة :

إذا كانت س ، ص مجموعتين غير خاليتين فإن العلاقة من س الى ص تسمى دالة إذا ارتبط كل عنصر من عناصر س بعنصر واحد فقط من عناصر ص

و تكتب د : س ⟵ ص أو ص = د(س)

نعبر عن الدالة بطريقتين :

(١) كمجموعة من الازواج المرتبة (بيان الدالة) د : س ⟵ ص

(٢) بقاعدة رياضية تسمى قاعدة الدالة (الصور التى تأخذها الدالة) : ص = د(س)

المجال و المجال المقابل و المدى :

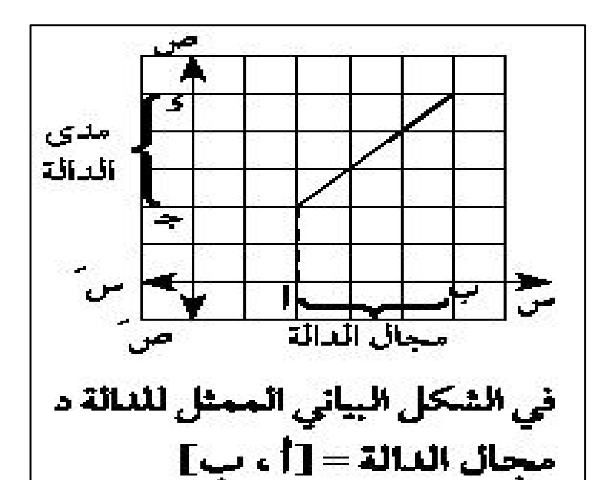
من الشكل المقابل لدالة ما :

المجال :

هو مجموعة العناصر التى يأخذها المتغير س بحيث يكون الناتج كمية معرفة " عدد حقيقى ". س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

و تكون قيمه على محور السينات (الفترة المقابلة للشكل البيانى د

المجال المقابل : هو مجموعة الأعداد التى تأخذها ص = { ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ }



المدى : { ٦ ، ٨ ، ٩ }

مجموعة صور عناصر س فى ص

(العناصر فى ص المرتبطة بعناصر س)

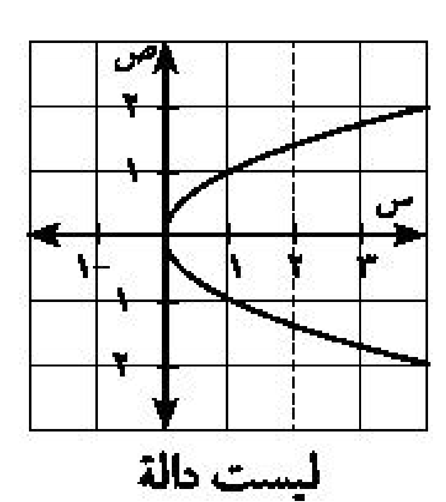
هو مجموعة العناصر الحقيقية التى يأخذها المتغير ص ونحصل عليه بيانيا من محور الصادات

][أسفل قيمة ، أعلى قيمة][

الدالة الحقيقية : هى دالة كل من مجالها و مجالها المقابل مجموعة جزئية من ع

- **العلاقة تكون دالة بيانيا (اختبار الخط الرأسى) :**

إذا مثلث علاقة بمجموعة من النقاط فى مستوى احداثى متعامد و قطع الخط الرأسي عند كل عنصر من عناصر المجال تمثيليهما البيانى فى نقطة فقط فإن هذه العلاقة تمثل دالة



ليست دالة　　　　**دالة**

مثال : أيا من الاشكال الآتية يمثل دالة فى س و لماذا ؟

[١]　[٢]　[٣]

[٤]　[٥]　[٦]

الحل :

الشكل [١] :

لا يمثل دالة لأن الخط الرأسى المار بالنقطة (٠ ، ٠) يقطع الشكل البيانى فى نقطتين

الشكل [٢] :

تمثل دالة لأن الخط الرأسي عند كل نقطة على محور السينات (المجال) يقطع المنحنى فى نقطة واحدة فقط .

الشكل [٣] : لا يمثل دالة لأن يوجد خط رأسي يقطع المنحنى فى أكثر من نقطة .

الاشكال [٤ ، ٥ ، ٦] : تمثل دالة

*** قواعـــد هـــامة لتعيين المجال :**

١) مجال أى دالة كثيرة الحدود مهما كان درجتها = ح .

الدالة كثيرة الحدود هى الدالة التى لا تحتوى على متغير فى المقام مثل :

د(س) = ٥ ، د(س) = ٣ س ، د(س) = ٢ س ـ ٥ ، د(س) = $س^٢$ + س + ١

د(س) = $س^٣$ ـ ٢ س + ٤ ، د(س) = $\frac{س - ٣}{٢}$

٢) مجال الدالة الكسرية = ح - أصفـــــار المقـــــام .

الدالة الكسرية هى الدالة التى يكون مقامها يحتوى على متغير

ملحوظة : مجموعة أصفار المقام هى مجموعة قيم س التى تجعل المقام = صفر

مثلا لمعرفة مجال الدالة د(س) = $\frac{س - ٢}{س^٢ - ٩}$ نوجد أصفار المقام

بوضع $س^٢$ ـ ٩ = ٠ ∴ $س^٢$ = ٩ ∴ س = ± ٣ ∴ مجال د(س) = ح ـ { ٣ ، ـ ٣ }

حـــالة خـــاصة : ⇦ مجال الدالة الكسرية = ح فى الحالات الأتية :

*** المقام دالة ثابتة .**

*** المقام على الصورة $س^ن$ + أ حيث ن ← زوجى ، أ ∈ $ح^+$**

*** المقام على الصورة أ $س^٢$ + ب س + جـ : حيث المميز يكون سالباً .**

مثلا : مجال الدالة د(س) = $\frac{س - ٢}{س^٢ + ٩}$

نضع $س^٢$ + ٩ = ٠ حيث أ = ١ ، ب = ٠ ، جـ = ٩

المميز = $ب^٢$ ـ ٤ أ جـ = $(٠)^٢$ ـ ٤ × ١ × ٩ = ـ ٣٦ < ٠ (كمية سالبة)

∴ مجال د(س) = ح

٣) <u>مجال الدالة الجذرية</u> :

(يقال دالة جذرية إذا كانت قاعدة الدالة تشتمل على الجذر التربيعى)

أولا : إذا كان الجذر فى البسط : المجال هو الفترة ما تحت الجذر ⩾ ٠

ثانيا : إذا كان الجذر فى المقام : المجال هو الفترة ما تحت الجذر > ٠

<u>حالة خاصة :</u>

الدالة د(س) = $\sqrt[ن]{هـ(س)}$ حيث ن ∈ $ص_+$ ، هـ (س) كثيرة حدود

أولا : عندما ن عدد فردى فإن : مجال الدالة = ح ، ن تسمى دليل الجذر

ثانيا : عندما ن عدد زوجى فإن : مجال الدالة هو مجموعة قيم س التى تجعل هـ(س) ⩾ ٠

<u>أولاً</u> : عندما يكون دليل الجذر فـردياً :

مثلا　　د (س) = $\sqrt[٣]{س - ٣}$ ← مجال د (س) = ح

<u>ثانياً</u> : عندما يكون دليل الجذر زوجيا :

مثلا : د (س) = $\sqrt[٤]{س - ٥}$

∵ س ـ ٥ ≥ ٠ ← س ≥ ٥ ← مجال د (س) = [٥ ، ∞ [

مثال : عين مجال د (س) = $\sqrt{س^٢ - س - ١٢}$

الحل :

بوضع $س^٢$ ـ س ـ ١٢ = ٠

(س - ٤)(س + ٣) = ٠

س ـ ٤ = ٠	س + ٣ = ٠
س = ٤	س = ـ ٣

∵ مجال الدالة الجذرية كمية غير سالبة (≤ ٠)

∴ مجال د (س) = [٤ ، ∞ [∪] - ∞ ، - ٣]

= ح -] - ٣ ، ٤ [

مثال : عين مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية :

[١] $د_١(س) = \sqrt{س + ٤}$ [٢] $د_٢(س) = \sqrt{س^٢ - ٩}$

[٣] $د_٣(س) = \frac{٢ س + ٣}{س^٢ - ٣ س + ٢}$ [٤] $د_٤(س) = \frac{س - ٢}{س^٢ + ٩}$

[٥] $د_٥(س) = \frac{١}{\sqrt{س^٢ - ٩}}$ [٦] $د_٦(س) = \sqrt[٣]{س + ٣}$

الحل :

[١] ∵ دليل الجذر زوجى ∴ س + ٤ ⩾ ٠ ⟵ س ⩾ – ٤

∴ المجال = ح –] - ٤ ، ∞ [

[٢] ∵ دليل الجذر زوجى ∴ $س^٢$ – ٩ ⩾ ٠ ⟵ $س^٢$ ⩾ ٩ ⟵ س ⩾ ± ٣

∴ المجال =] - ∞ ، - ٣] ∪ [٣ ، ∞ [= ح -] – ٣ ، ٣ [

[٣] نضع $س^٢$ – ٣ س + ٢ = ٠ ∴ (س – ٢)(س – ١) = ٠ ⟵ س = ٢ أ، ١

∴ المجال = ح – { ١ ، ٢ }

[٤] نضع $س^٢$ + ٩ = ٠ فيكون المميز كمية سالبة ∴ المجال = ح

[٥] نضع $س^٢$ – ٩ > ٠ ∴ (س – ٣)(س + ٣) = ٠ ⟵ س = ٣ ، س = - ٣

∵ المجال هو الفترة ما تحت الجذر > ٠ ∴ المجال = ح – [- ٣ ، ٣]

[٦] ∵ دليل الجذر فردى ∴ المجال = ح

* ايجاد المجال و المدى للدالة المعرفة بأكثر من قاعدة :

مثال : ارسم منحنى الدالة و اذكر مجالها و مداها

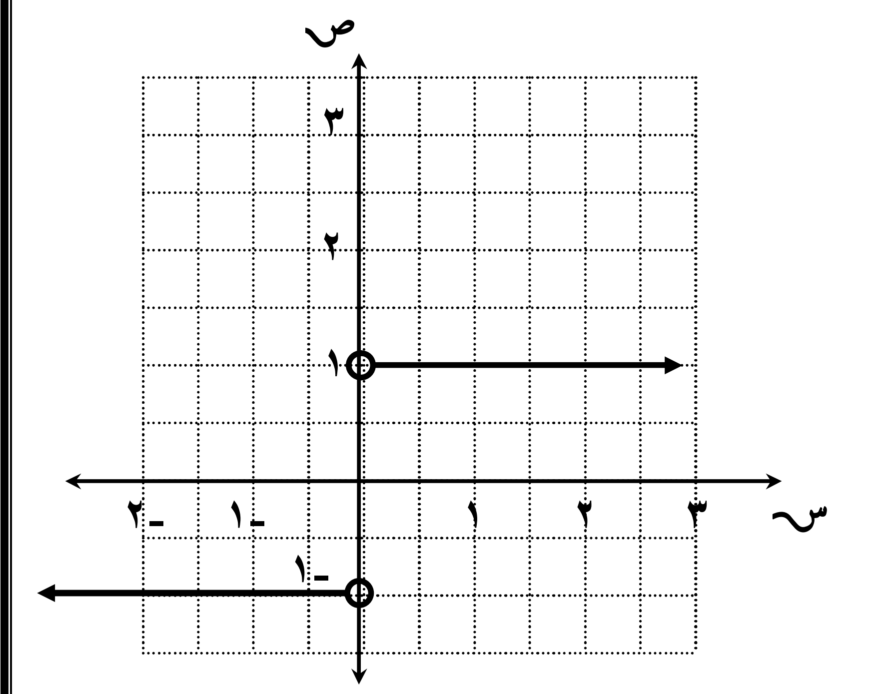
(أ) د(س) = { ـ ١ س < ٠ ، ١ س > ٠ }

(ب) د(س) = { س + ٢ س ⩾ ٠ ، س ـ ٢ س < ٠ }

الحل :

(أ) عند س < ٠ دالة ثابتة تمثل شعاع يوازى محور السينات و يبدأ من (٠ ، ـ ١)

عند س > ٠ دالة ثابتة تمثل شعاع يوازى محور السينات و يبدأ من (٠ ، ١)



المجال = ح ـ { ٠ }

المدى = { ١ ، ـ ١ }

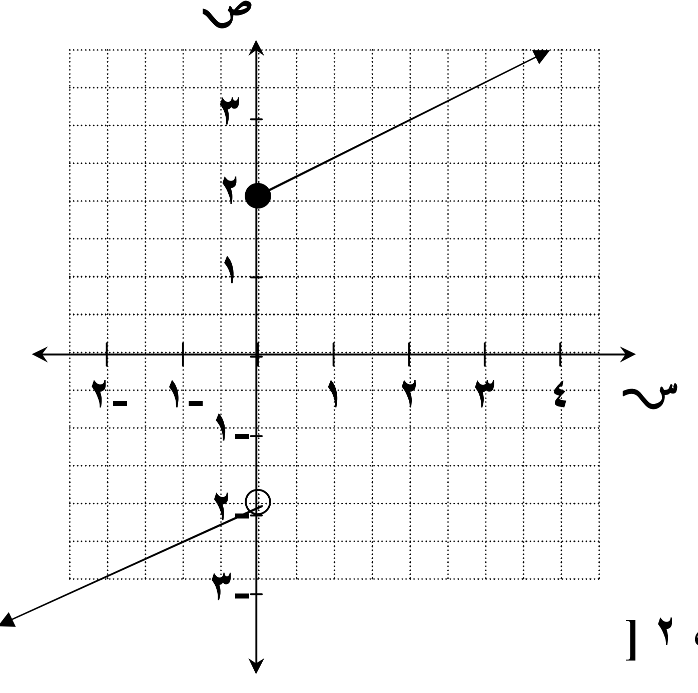
(ب) نرسم جدول لكل قاعدة

س < ٠

س	٠	ـ ١	ـ ٢
د(س)	ـ ٢	ـ ٣	ـ ٤

س ⩾ ٠

س	٠	١	٢
د(س)	٢	٣	٤



المجال = ح ، المدى = ح ـ] ـ ٢ ، ٢ [

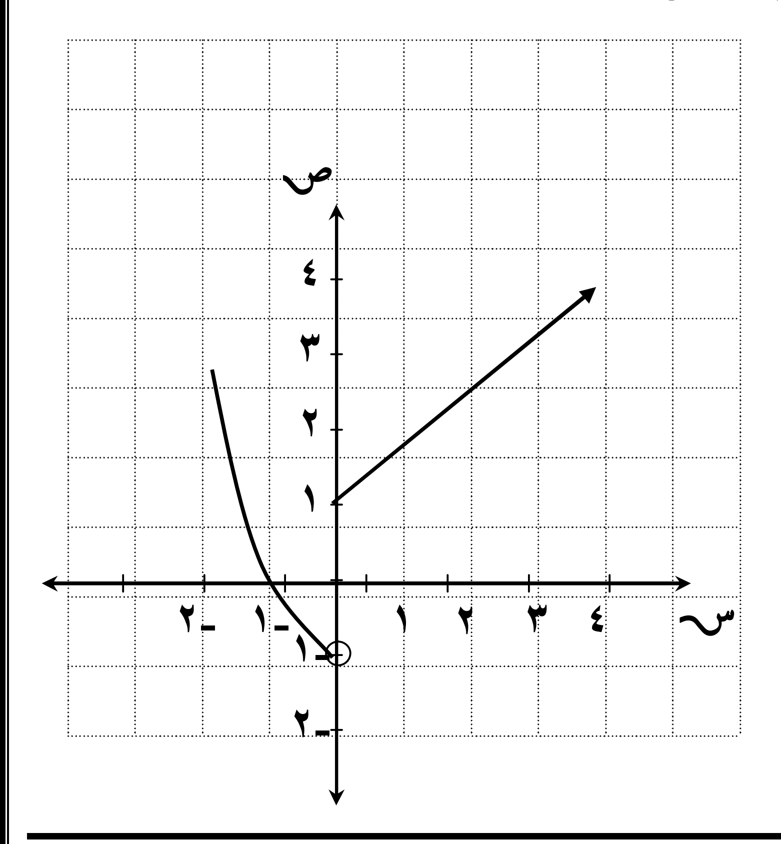
مثال : إذا كانت د(س) = $\begin{cases} س^٢ - ١ & -٢ \leqslant س < ٠ \\ س + ١ & س \leqslant ٠ \end{cases}$

ارسم الشكل البيانى للدالة و من الرسم استنتج مجال و مدى الدالة

الحل :

س	-٢	-١	⊙٠	٠	١	٢
د(س)	٣	٠	⊙-١	١	٢	٣

(العمودان الأولان والثالث: $س^٢ - ١$ ، والأعمدة الأخيرة: $س + ١$)



من الرسم : مجال الدالة = [- ٢ ، ∞ [

المدى =] -١ ، ∞ [

مثال :

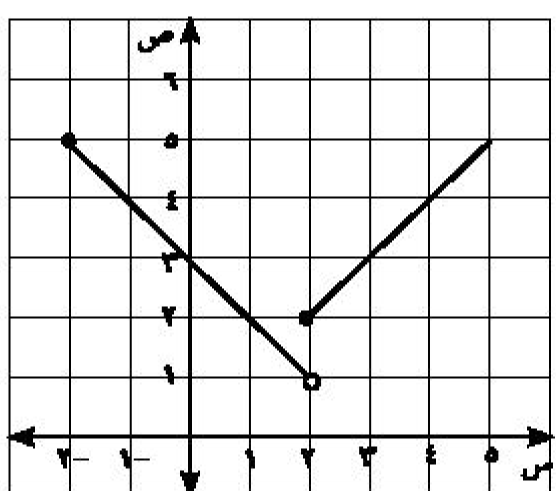
إذا كانت د(س) = $\begin{cases} ٣ - س & \text{عندما } -٢ \leqslant س < ٢ \\ س & \text{عندما } ٢ \leqslant س \leqslant ٥ \end{cases}$

ارسم الشكل البيانى للدالة و استنتج من الرسم

مجال الدالة و مداها

الحل :

المجال = [- ٢ ، ٥] ، المدى =] ١ ، ٥]



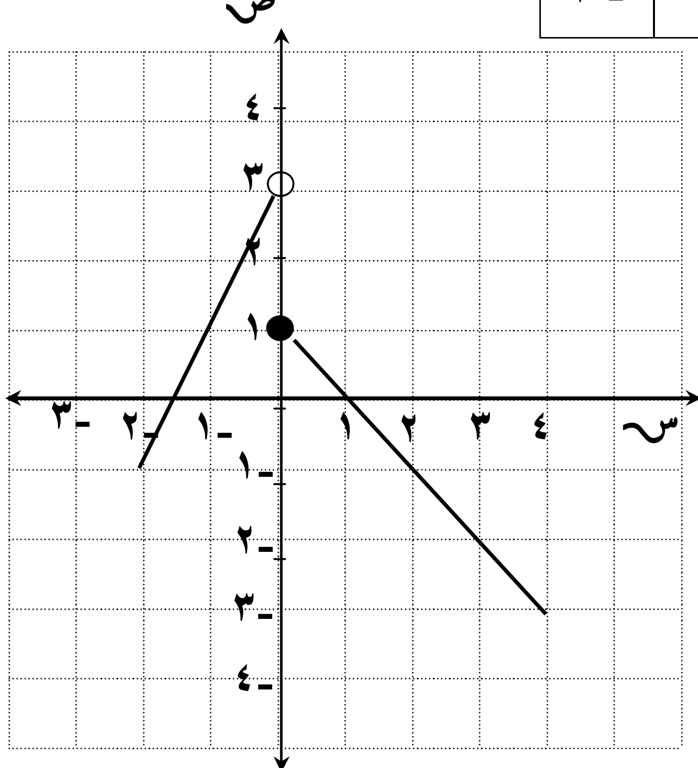
مثال : إذا كانت الدالة د : [ـ ٢ ، ٤] ⟵ ح حيث

د(س) = { ٢ س + ٣ عندما ـ ٢ ⩽ س < ٠
{ ١ ـ س عندما ٠ ⩽ س ⩽ ٤

ارسم الشكل البيانى للدالة د و من الرسم استنتج مجال و مدى الدالة

الحل :

	ـ ٢ ⩽ س < ٠			٠ ⩽ س ⩽ ٤		
س	ـ ٢	ـ ١	٠	٠	١	٤
ص	ـ ١	١	٣	١	٠	ـ ٣



المجال = [ـ ٢ ، ٤]

المدى = [ـ ٣ ، ٣ [

مثال : إذا كان ح محيط مربع طول ضلعه ل اكتب محيط المربع كدالة فى طول ضلعه ح (ل)

ثم أوجد : (أ) ح (٣) (ب) ح ($\frac{١٥}{٤}$)

الحل :

∵ ح (ل) = ٤ × ل ∴ ح (٣) = ٤ × ٣ = ١٢ ، ح ($\frac{١٥}{٤}$) = ٤ × $\frac{١٥}{٤}$ = ١٥

العمليات على الــــــدوال

إذا كانت $د_١$ ، $د_٢$ دالتين مجالاهما $م_١$، $م_٢$ فإن:

(١) $(د_١ \pm د_٢)(س) = د_١(س) \pm د_٢(س)$ ، مجال $(د_١ \pm د_٢)$ هو $م_١ \cap م_٢$

(٢) $(د_١ . د_٢)(س) = د_١(س) . د_٢(س)$ ، مجال $(د_١ . د_٢)$ هو $م_١ \cap م_٢$

(٣) $(\frac{د_١}{د_٢})(س) = \frac{د_١(س)}{د_٢(س)}$ حيث $د_٢(س) \ne ٠$ مجال $(\frac{د_١}{د_٢})$ هو $(م_١ \cap م_٢) - ف(د_٢)$

حيث $ف(د_٢)$ مجموعة أصفار $د_٢$

نلاحـظ من هذا التعريف أن:

جميع العمليات للدالة الجديدة يساوى $م_١ \cap م_٢$ ما عدا القيم التى تجعل دالة المقام = صفر فى عملية القسمة .

مثال : إذا كانت د ، ر دالتين حقيقيتين حيث $د(س) = س^٢ - ٤$ ، $ر(س) = \sqrt{س - ١}$

أوجد : (أ) مجال كل من الدوال الآتية : (د + ر) ، (د – ر) ، (د. ر) ، $(\frac{د}{ر})$ ، $(\frac{ر}{د})$

(ب) القيم العددية (إن أمكن) لكل من الدوال الآتية :

(د + ر) (٥) ، (د . ر) (٢) ، $(\frac{د}{ر})$(٣) ، $(\frac{ر}{د})$(- ٢)

الحل:

∵ مجال د = $م_١$ = ح ، مجال ر = $م_٢$ = [١ ، ∞ [، مجموعة اصفار د = {٢ ، - ٢}
، مجموعة اصفار ر = { ٠ }

ح
$م_١$
$م_٢$
١
١

(أ) (د + ر) (س) = د(س) + ر(س) = $س^٢ - ٤ + \sqrt{س - ١}$

∴ مجال (د + ر) = $م_١ \cap م_٢$ = ح ∩ [١ ، ∞ [= [١ ، ∞ [

(د – ر)(س) = د(س) – ر(س) = $س^٢ - ٤ - \sqrt{س - ١}$

∴ مجال (د – ر) = $م_١ \cap م_٢$ = ح ∩ [١ ، ∞ [= [١ ، ∞ [

$(\text{د . ر})(\text{س}) = \text{د(س) . ر(س)} = (\text{س}^{٢} - ٤)\sqrt{\text{س} - ١}$

∴ مجال (د . ر) = م١ ∩ م٢ = ح ∩ [١ ، ∞ [= [١ ، ∞ [

م١　ح　م٢　١　١

$\left(\dfrac{\text{د}}{\text{ر}}\right)(\text{س}) = \dfrac{\text{د(س)}}{\text{ر(س)}} = \dfrac{\text{س}^{٢} - ٤}{\sqrt{\text{س} - ١}}$

مجال $\left(\dfrac{\text{د}}{\text{ر}}\right)$(س) = م١ ∩ م٢ − ص(ر)

= ح ∩ [١ ، ∞ [− { ١ } =] ١ ، ∞ [

$\left(\dfrac{\text{ر}}{\text{د}}\right)(\text{س}) = \dfrac{\text{ر(س)}}{\text{د(س)}} = \dfrac{\sqrt{\text{س} - ١}}{\text{س}^{٢} - ٤}$

م٢　١　م١　ح　-٢　٢　-٢　٢

مجال $\left(\dfrac{\text{ر}}{\text{د}}\right)$(س) = م١ ∩ م٢ − ص(د)

= ح ∩ [١ ، ∞ [− { ٢ ، -٢ }

= [١ ، ∞ [− { ٢ }　　حيث الدالة غير معرفة عند س = - ٢

(ب) (د + ر) (س) = $\text{س}^{٢} - ٤ + \sqrt{\text{س} - ١}$　لكل س ∈ [١ ، ∞ [

∵ ٥ ∈ [١ ، ∞ [　　∴ (د + ر)(٥) = $(٥)^{٢} - ٤ + \sqrt{٥ - ١} = ١٩$

(د . ر) (س) = $(\text{س}^{٢} - ٤)\sqrt{\text{س} - ١}$　لكل س ∈ [١ ، ∞ [

∵ ٢ ∈ [١ ، ∞ [　　∴ (د . ر) (٢) = $(٢^{٢} - ٤)\sqrt{٢ - ١}$ = صفر

$\left(\dfrac{\text{د}}{\text{ر}}\right)(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^{٢} - ٤}{\sqrt{\text{س} - ١}}$　لكل س ∈] ١ ، ∞ [

∵ ٣ ∈] ١ ، ∞ [　　∴ $\left(\dfrac{\text{د}}{\text{ر}}\right)(٣) = \dfrac{٣^{٢} - ٤}{\sqrt{٣ - ١}} = \dfrac{٥}{\sqrt{٢}}$

$\left(\dfrac{\text{ر}}{\text{د}}\right)(\text{س}) = \dfrac{\sqrt{\text{س} - ١}}{\text{س}^{٢} - ٤}$　لكل س ∈ [١، ∞ [− { ٢ }

∵ − ٢ ∉ [١، ∞ [− { ٢ }　　∴ $\left(\dfrac{\text{ر}}{\text{د}}\right)(-٢) = \dfrac{\sqrt{-٢ - ١}}{(-٢)^{٢} - ٤} = \dfrac{\sqrt{-٣}}{\text{صفر}}$ غير معرفة

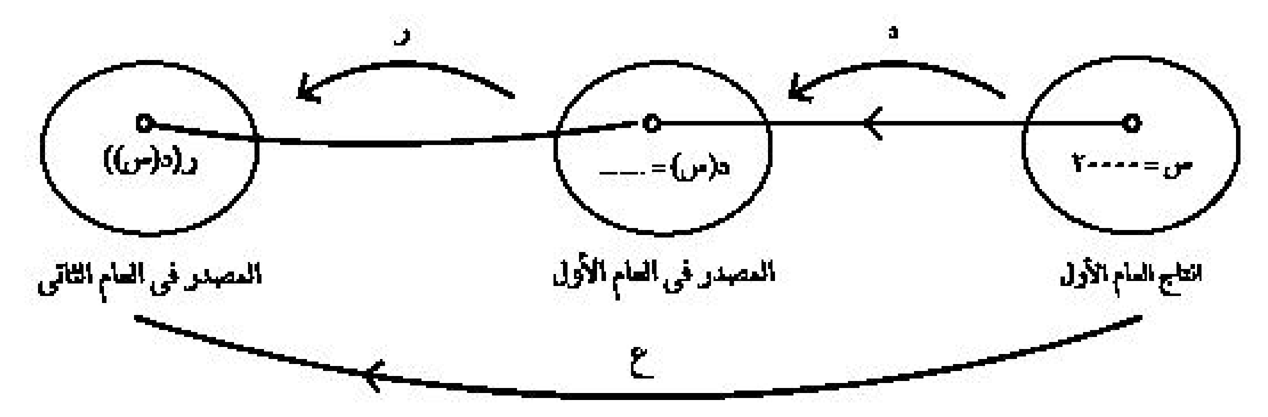
تركيب الـــدوال

مثال توضيحى :

إذا كان هناك مصنع يقوم بتصدير جزء من انتاجه و يمثل بالعلاقة د(س) = $\frac{١}{٤}$ س حيث س يمثل عدد الوحدات المنتجة فى العام الأول ، و كان عدد الوحدات المصدرة فى العام التالى يعطى بالعلاقة ر(د) = د + ١٥٠٠ حيث د عدد الوحدات المصدرة فى العام الأول . كم يكون عدد الوحدات المصدرة فى العام الثانى إذا كان انتاج المصنع فى العام الأول :

(أ) ٢٠٠٠٠ وحدة   (ب) ٨٠٠٠٠ وحدة

الحل : يمكن عمل رسم يوضح الانتاج و التصدير كالتالى :



∵ د(س) = $\frac{١}{٤}$ س دالة التصدير العام الاول ، ر(د) = د + ١٥٠٠ دالة التصدير العام الثانى

∴ ر($\frac{١}{٤}$ س) = $\frac{١}{٤}$ س + ١٥٠٠

عند س = ٢٠٠٠٠ ∴ ر($\frac{١}{٤}$ × ٢٠٠٠٠) = $\frac{١}{٤}$ × ٢٠٠٠٠ + ١٥٠٠ = ٦٥٠٠ وحدة

عدد الوحدات المصدرة فى العام الثانى = ٦٥٠٠ وحدة

عند س = ٨٠٠٠٠ ∴ ر($\frac{١}{٤}$ × ٨٠٠٠٠) = $\frac{١}{٤}$ × ٨٠٠٠٠ + ١٥٠٠ = ٢١٥٠٠ وحدة

عدد الوحدات المصدرة فى العام الثانى = ٢١٥٠٠ وحدة

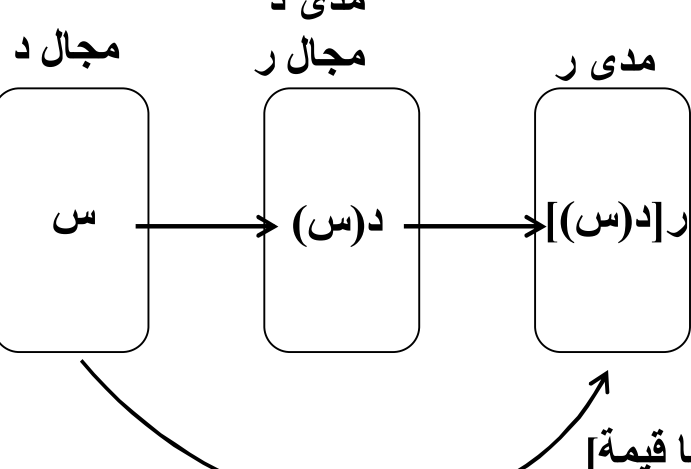
الخلاصة أن هناك دالتين مرتبطتان ببعض حيث نعوض بدالة االتصدير العام الأول فى دالة التصدير العام الثانى و هذه فكرة تركيب دالتين (ايجاد دالة داخلية ثم ايجاد دالة خارجية)

تعريف :

إذا كانت ر، د دالتين وكان مدى الدالة د مجموعة جزئية من مجال الدالة ر

فإنه يمكن ايجاد دالة التركيب ع الجديدة تتركب من الدالتين د ، ر هى

ع(س)= (ر ° د) (س) = ر [د(س)]



و تقرأ ر تركيب د أو ر بعد د

حيث تطبق د أولا ثم الدالة ر

ملحوظة : ممكن أن تكون الدالة (ر ° د) (س) معرفة أو غير معرفة [لها قيمة معينة أو ليس لها قيمة]

و لذلك ترتيب الدالتين عند تركيبهما مهم .

مثال : إذا كان د(س) = ٤ س^{٢} ، ر(س) = ٢ س أوجد : (د ° ر)(س) ، (ر ° د)(س) و ماذا تلاحظ .

الحل : (د ° ر)(س) = د [ر(س)] = د(٢ س) = ٤ × (٢ س)^{٢} = ١٦ س^{٢}

(ر ° د)(س)= ر [د(س)] = ر(٤ س^{٢}) = ٢ × (٤ س^{٢}) = ٨ س^{٢}

يلاحظ أن : (د ° ر)(س) ≠ (ر ° د)(س) (تركيب الدوال ليس ابدالى)

ملحوظة : لايجاد (ر ° د)(س) نعوض بالدالة د بدلا من المتغير س فى الدالة ر

نوجد الدالة د أولا ثم الدالة ر.

مثال : إذا كان د(س) = س^{٢} + ٦ ، ر(س) = ٣ س

أولا : أوجد (د ° ر) (٣)   ثانيا : حدد قيم س التى تجعل (د° ر) (س) = ٤٢

الحل :

أولا : (د ٥ ر) (س) = د [ر(س)] = د(٣ س) = (٣ س)^{٢} + ٦ = ٩ س^{٢} + ٦

∴ (د ٥ ر) (٣) = ٩ (٣)^{٢} + ٦ = ٨٧

حل آخر : ∵ ر(٣) = ٣ × ٣ = ٩ ∴ (د ٥ ر) (٣) = د [ر(٣)] = (٩)^{٢} + ٦ = ٨٧

ثانيا : ∵ (د ٥ ر) (س) = ٤٢ ∴ ٩ س^{٢} + ٦ = ٤٢ ∴ ٩ س^{٢} = ٣٦ بالقسمة ٩

∴ س^{٢} = ٤ ∴ س = ± ٢

مثال : إذا كان د(س) = س^{٢} + ١ ، ر(س) = $\sqrt{\text{س} - ٣}$

أوجد : (د ٥ ر)(س) فى أبسط صورة محددا المجال ثم أوجد (د ٥ ر) (٣)

الحل:

(د ٥ ر)(س) = د [ر(س)] = د ($\sqrt{\text{س} - ٣}$) = ($\sqrt{\text{س} - ٣}$)^{٢} + ١

= س – ٣ + ١ = س – ٢

مجال (د ٥ ر)(س) = { س : س ∈ ح ، س ⩾ ٣ } = [٣ ، ∞ [

(د ٥ ر) (٣) = ٣ – ٢ = ١

حل آخر : (د ٥ ر) (٣) = د [ر(٣)] = د($\sqrt{٣ - ٣}$) = د(٠) = (٠)^{٢} + ١ = ١

سؤال للتفكير : إذا كان ع(س) = $\sqrt{\text{س}^{٣} - ٤}$ فأوجد الدالتين د ، ر بحيث يكون

ع(س) = (د ٥ ر)(س)

الحل : (هناك أكثر من حل لهذا السؤال)

∵ ع(س) = $\sqrt{\text{س}^{٣} - ٤}$ = $\sqrt{(\text{س}^{٣} - ١) - ٣}$

∴ ر(س) = س^{٣} – ١ ، د(س) = $\sqrt{\text{س} - ٣}$ تحقق ع(س) = (د ٥ ر)(س)

حل آخر: ∵ ع(س) = $\sqrt{\text{س}^{٣} - ٤}$ = $\sqrt{(\text{س}^{٣} - ٢) - ٢}$

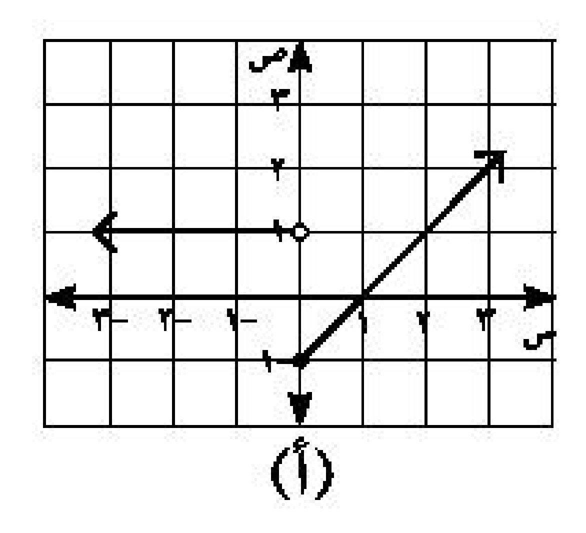
∴ ر(س) = س^{٣} – ٢ ، د(س) = $\sqrt{\text{س} - ١}$ تحقق ع(س) = (د ٥ ر)(س)

حل آخر: ∵ ع(س) = $\sqrt{\text{س}^{٣} - ٤}$

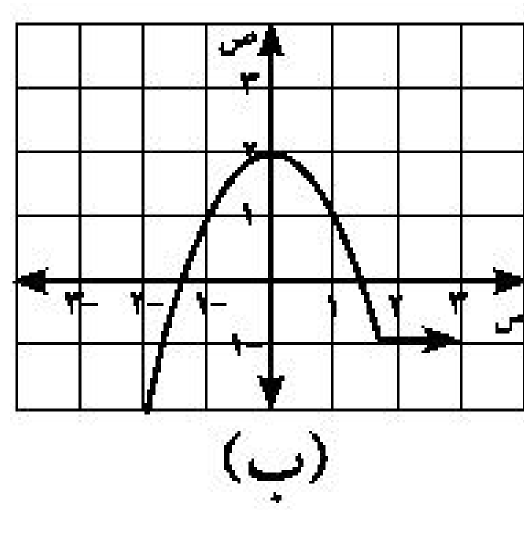
∴ ر(س) = س^{٣} – ٤ ، د(س) = $\sqrt{\text{س}}$ تحقق ع(س) = (د ٥ ر)(س)

تمارين (١)

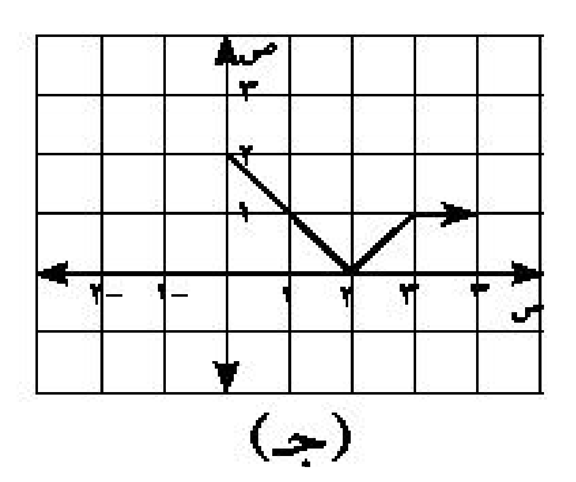
[١] ايا من العلاقات الآتية لا تمثل دالة :



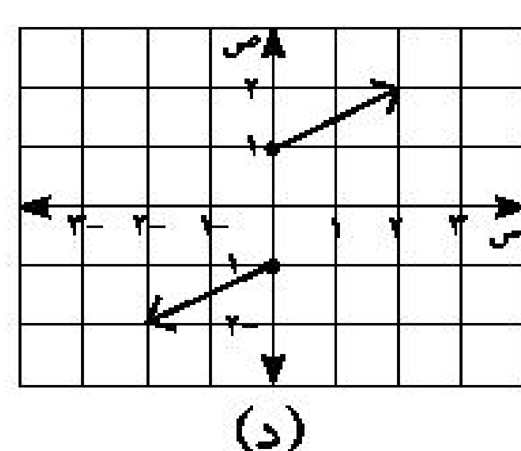
(أ)



(ب)



(جـ)



(د)

[٢] جميع العلاقات الآتية تكون فيها ص دالة فى ما عدا العلاقة :

(١) ص = ٢ س ـ ٣ (٢) ص = س^{٢} ـ ٤ (٣) س = ص^{٢} ـ ٢ (٤) ص = حا س

[٣] عين مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الاتية :

(١) د(س) = س^{٢} ـ ٢ س (٢) د(س) = ـ ٥ (٣) د(س) = $\sqrt{٢ \text{ س} - ٣}$

(٤) د(س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س} - ٣}$ (٥) د(س) = $\sqrt[٣]{٤ - \text{س}}$ (٦) د(س) = $\frac{٣ \text{ س} + ٢}{\sqrt{\text{س} + ٢}}$

(٧) د(س) = { ـ ٢ عندما س < ٢ ، ٤ ـ س عندما س ⩾ ٢ }

(٨) د(س) = $\frac{\text{س} - ٢}{\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٦}$

(٩) د(س) = $\frac{\sqrt{\text{س} - ٢}}{\text{س}^٢ - ١}$

(١٠) د(س) = $\sqrt[٣]{\text{س}^٢ + \text{س} - ٦}$

[٤] مثل الدوال الاتية بيانيا و عين مداها :

(١) إذا كانت د : [ـ ١ ، ٥] ⟵ ح ، د(س) = { ٤ ـ س عندما ـ١ ⩽ س < ٢ ، س عندما ٢ ⩽ س ⩽ ٥ }

فأوجد كلا من د(ـ١) ، د(٠) ، د(١) ، د(٢) ، د(٣) ، د(٤) ، د(٥)
ثم ارسم الشكل البيانى للدالة و استنتج من الرسم مداها .

(٢) إذا كانت د(س) = { ٢ س عندما س ⩽ ٢ ، س + ٢ عندما س > ٢ }

فاوجد كلا من د(٢) ، د(٣) ، د(٤) ، د(١) ، د(٠) ، د(ـ ١) ، د(ـ ٤)
ثم ارسم الشكل البيانى للدالة و استنتج من الرسم مداها .

(٣) إذا كانت د : [ـ ٣ ، ٣] ⟵ ح حيث

د(س) = { $\text{س}^٢$ + ١ عندما ـ ٣ ⩽ س < ٠ ، س + ٢ عندما ٠ ⩽ س ⩽ ٣ }

ارسم الشكل البيانى للدالة و من الرسم استنتج مدى هذه الدالة

(٤) إذا كانت $\text{د}_١$: ح ⟵ ح حيث $\text{د}_١$(س) = ٣ س ـ ١

$\text{د}_٢$: [ـ ٢ ، ٣] ⟵ ح حيث $\text{د}_٢$(س) = ٢ س + ٤

أوجد : ($\text{د}_١$ + $\text{د}_٢$) (س) ، ($\text{د}_١$ ـ $\text{د}_٢$) (س) مبيا مجال كل دالة .

(٥) إذا كان : $د_١$(س) = س + ٢ و مجال $د_١$ = [- ٣ ، ٤] ، $د_٢$ (س) = $س^٢$ + ٢ س

و مجال $د_٢$ = [- ١ ، ٣] أوجد :

($د_١$ + $د_٢$)(س) ، ($د_١$ - $د_٢$)(س) ، ($\frac{د_١}{د_٢}$)(س) ، ($\frac{د_٢}{د_١}$)(س) مبيا مجال كل دالة

---

(٦) إذا كان : د(س) = ٣ س + ١ ، ر(س) = $س^٢$ - ٥ ، ق(س) = $س^٢$ أوجد :

(أ) (د ° ر) (٢) (ب) (ر ° د)(س) (جـ) (ر ° ق)(١) (د) (ق ° د)(-٢)

---

(٧) إذا كان : د(س) = $\frac{١}{س}$ ، ر(س) = س + ٣ أوجد :

(د ° ر)(س) ، (ر ° د)(س) و حدد مجال كل منهما .

---

(٨) إذا كان د(س) = $س^٢$ - ٣ ، ر(س) = $\sqrt{س - ٢}$

أوجد : (د ° ر)(س) فى أبسط صورة محددا المجال ثم أوجد (د ° ر) (٣)

مع تمنياتى للجميع بالنجاح و التفوق

معنا دائما فى القمة

عاشق الرياضيات المنفلوطى

بعض خواص الدوال

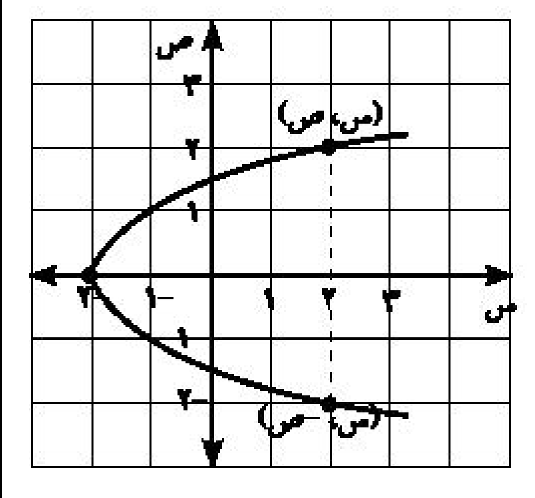
[١] التماثل فى الدوال :

لقد سبق أن درسنا التماثل حول مستقيم و نقطة الأصل حيث يمكن طى الشكل على المستقيم (أو نقطة الأصل) لينطبق نصفا المنحنى تماما .

(١) التماثل حول محور السينات :

فى الشكل المقابل :

النقطة (س ، ـ ص) الواقعة على الشكل البيانى لمنحنى الدالة هى صورة النقطة (س ، ص) الواقعة عليه ايضا بالانعكاس حول محور السينات

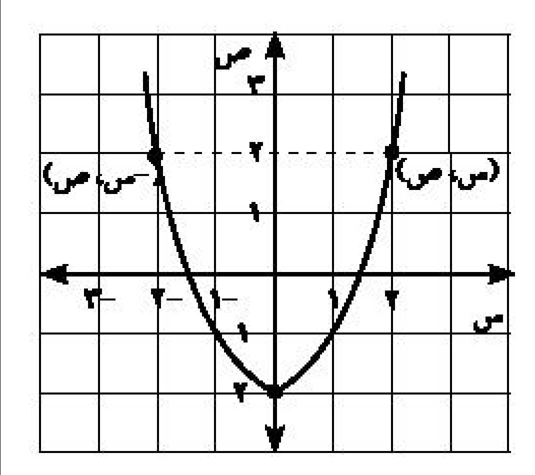


التماثل حول محور السينات

(٢) التماثل حول محور الصادات :

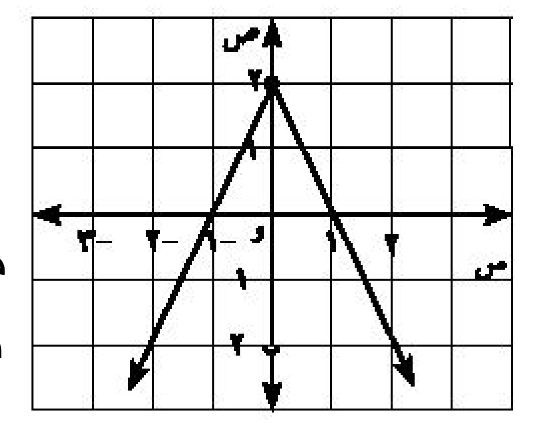
فى الشكل المقابل :

النقطة (ـ س ، ص) الواقعة على الشكل البيانى لمنحنى الدالة هى صورة النقطة (س ، ص) الواقعة عليه أيضا بالانعكاس حول محور الصادات



التماثل حول محور الصادات

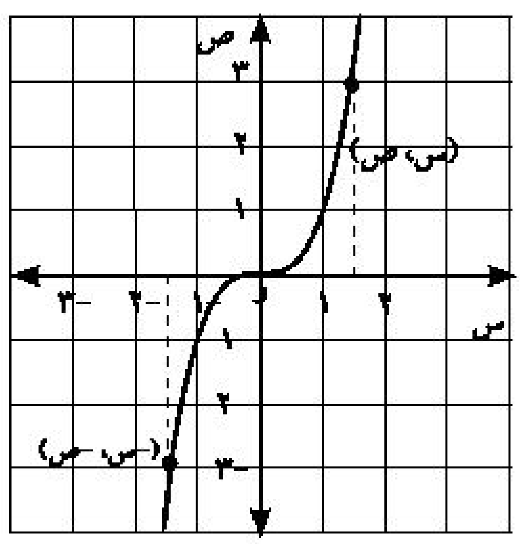
مثلا : النقطة (ـ ١ ، ٠) صورة النقطة (١ ، ٠) بالانعكاس حول محور الصادات



(٣) <u>التماثل حول نقطة الأصل</u> :

فى الشكل المقابل :

النقطة (ـ س ، ـ ص) الواقعة على الشكل البيانى لمنحنى الدالة هى صورة النقطة (س ، ص) الواقعة على نفس المنحنى أيضا بالانعكاس حول نقطة الأصل

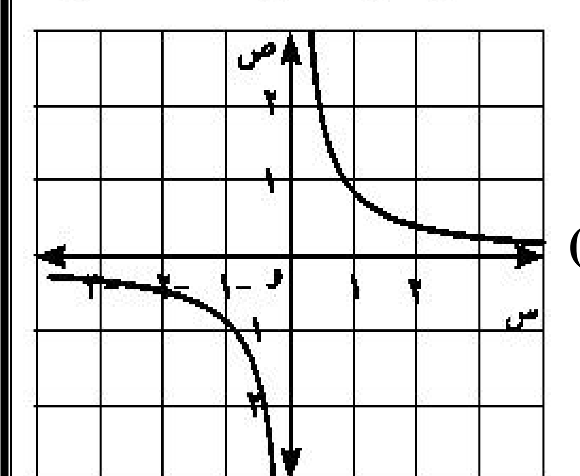


التماثل حول محور نقطة الأصل.

فى الشكل المقابل :

المنحنى متماثل حول نقطة الأصل

مثلا النقطة (١ ، ١) صورة النقطة (ـ ١ ، ـ ١) بالانعكاس فى نقطة الأصل



[٢] <u>الدوال الزوجية و الفردية :</u> [نوع الدوال]

أولا : <u>الدالة الزوجية</u> :

<u>جبريا</u> : الدالة د : س ⟵ ص تكون زوجية

إذا كانت : د (ـ س) = د (س)

∀ س ، ـ س ∋ المجال . [الرمز ∀ يقال لكل]

<u>بيانيا</u> : تكون الدالة زوجية إذا كان الشكل البيانى لها متماثلا حول الصادات .

فإذا كانت النقطة (س ، ص) ∋ منحنى الدالة فإن النقطة (ـ س ، ص) ∋ منحنى الدالة .

ثانياً : الدالة الفردية :

جبريا : الدالة د : س ⟵ ص تكون فردية

إذا كانت : د (ـ س) = ـ د (س) ∀ س ، ـ س ∋ المجال .

بيانيا : تكون الدالة فردية إذا كان الشكل البيانى لها متماثلا حول نقطة الأصل .

فإذا كانت النقطة (س ، ص) تقع على منحنى الدالة فإن النقطة (ـ س ، ـ ص) تقع أيضا على منحنى الدالة .

*** خطوات بحث نوع الدالة جبرياً :**

١) نوجد د(ـ س) و ذلك يتم باستبدال كل (س) بـ (ـ س) فى الدالة الاصلية

٢) نتعامل مع الأقواس و نفكها .

٣) نقارن بين الدالة الناتجة و الدالة الأصلية و نحكم على نوع الدالة حسب ما سبق .

*** ملاحظات هامة عند بحث نوع الدالة جبريا :**

١) $(- س)^{\text{عدد زوجى}} = س^{\text{نفس العدد الزوجى}}$ ، $(- س)^{\text{عدد فردى}} = - س^{\text{نفس العدد الفردى}}$

٢) الزاوية السالبة (ـ س) تعامل معاملة الربع الرابع فى إشارة الدوال المثلثية .

مثلا : حا (ـ س) = ـ حا س ، طا (ـ س) = ـ طا س ، حتا (ـ س) = حتا س

٣) د (س) + د (ـ س) = ٠

٤) كثير من الدوال ليست زوجية و ليس فردية إذا كان س ، ـ س ∌ مجال الدالة دون ايجاد د(ـ س)

مثال : باستخدام البرامج الرسومية مثل الدوال الآتية و ابحث أى من الدوال زوجية أو فردية أو غير ذلك ثم تحقق من اجابتك جبرياً .

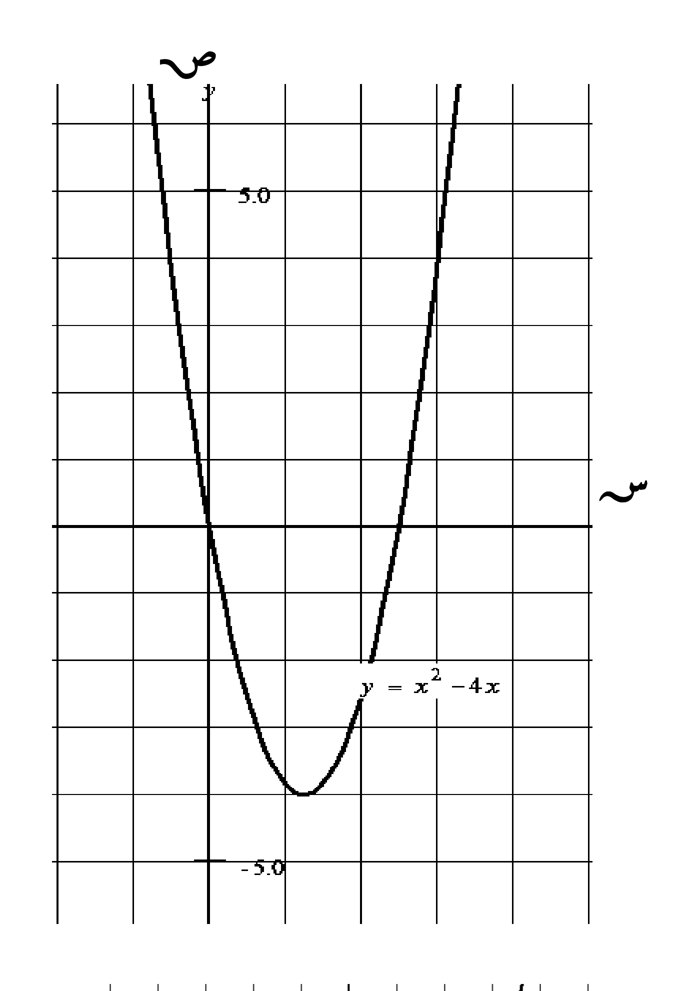
(١) د(س) = $س^{٢}$ ـ ٤ س　　(٢) د(س) = $س^{٣}$ + س

(٣) د(س) = س حا س

الحل :

(١) نكون الجدول : د(س) = س^٢ ـ ٤ س

س	ـ ١	٠	١	٢	٣
د(س)	٥	٠	ـ ٣	ـ ٤	ـ ٣

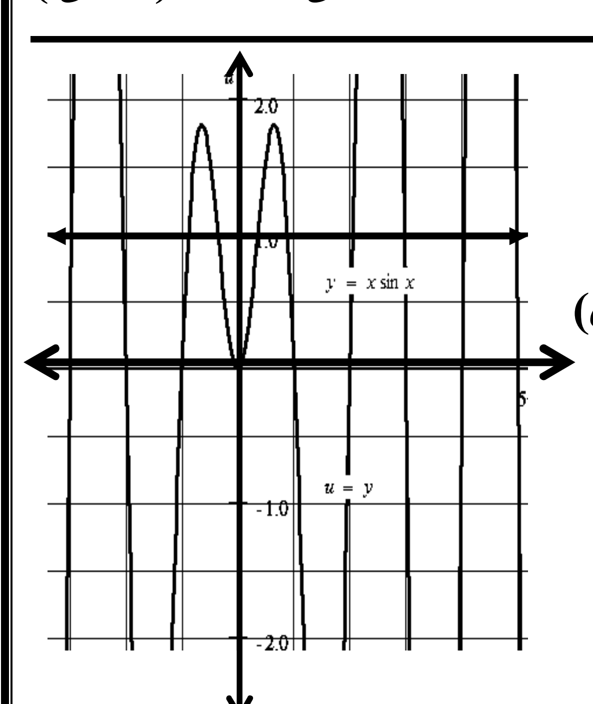


الشكل البيانى ليس متماثلا حول محور الصادات
و ليس متماثلا حول نقطة الأصل
د(ـ س) = (ـ س)^٢ ـ ٤ × (ـ س)
= س^٢ + ٤ س ≠ ـ د(س)
∴ الدالة لا زوجية و لا فردية

(٢) د(س) = س^٣ + س

س	ـ ٢	ـ ١	٠	١	٢
د(س)	ـ١٠	ـ ٢	٠	٢	١٠

الشكل البيانى متماثل حول نقطة الأصل
، د(ـ س) = (ـ س)^٣ + (ـ س)
= ـ س^٣ ـ س = ـ (س^٣ + س)
= ـ د(س)
∴ الدالة فردية



(٣) د(س) = س حا س

الشكل البيانى متماثلا حول محور الصادات

∵ د(ـ س) = ـ س حا (ـ س) = س حا س = د(س)

∴ الدالة زوجية .

مثال : مثل بيانيا الدالة د حيث

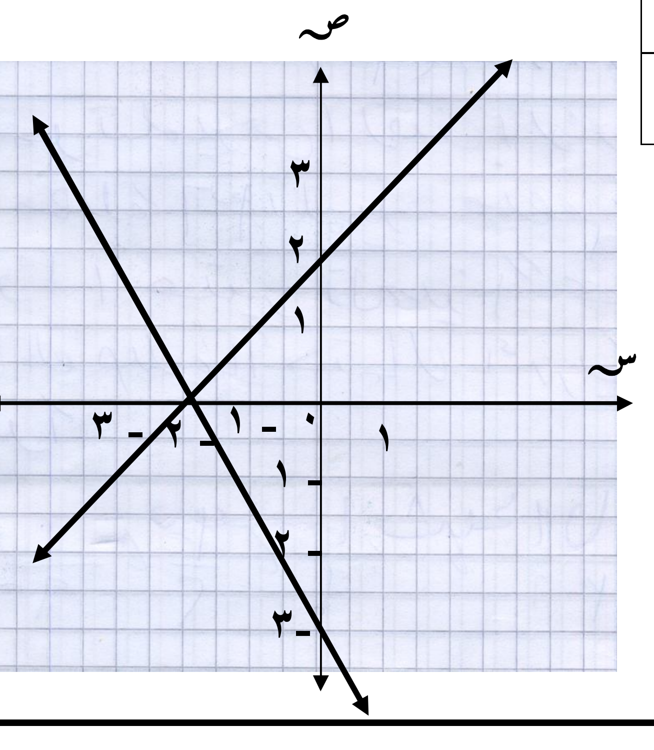
د(س) = {
س + ٢　⟵　س ⩽ ـ ٢
ـ س ـ ٢　⟵　س > ـ ٢

ثم بين هل الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك و تحقق من ذلك جبريا .

الحل :

س	ـ ٢	ـ ١	٠	ـ ٢	ـ ١	ـ ٣
ص	٠	١	٢	٠	ـ ١	١

(الأعمدة الثلاثة الأولى: س ⩽ ـ ٢ ، والأعمدة الثلاثة الأخيرة: س > ـ ٢)



الشكل البيانى متماثلا حول محور السينات

∵ د(ـ س) = {
ـ س + ٢　⟵　ـ س ⩽ ـ ٢
س ـ ٢　⟵　ـ س > ـ ٢

= {
ـ س + ٢　⟵　ـ س ⩾ ٢
س ـ ٢　⟵　س < ـ ٢

≠ ـ د(س)

∴ الدالة ليست زوجية و لا فردية

*[٣] الدالة الأحادية :

> الدالة د : س ← ص تسمى دالة أحادية
>
> إذا كان لكل أ ، ب ∈ س ، د(أ) = د(ب) فإن أ = ب
>
> أو لكل أ ≠ ب فإن د(أ) ≠ د(ب)
>
> و يتحقق من ذلك بيانيا بالخط الأفقى الذى لا يمر بأكثر من نقطة واحدة من بيان الدالة

مثال : أثبت أن كلا من الدالتين د ، ر دالة أحادية :

(١) د(س) = س − ٣　　　　(٢) ر(س) = $\frac{\text{٢ س − ٣}}{\text{س − ٥}}$

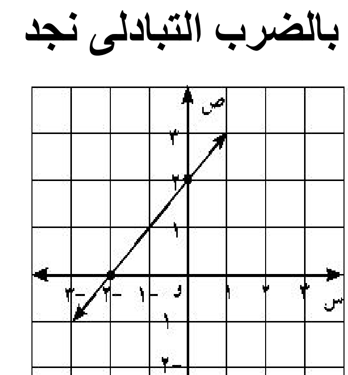
الحل : (١) إذا كان أ ، ب ∈ ح ، د(أ) = أ − ٣ ، د (ب) = ب − ٣

بوضع د(أ) = د(ب) ∴ أ − ٣ = ب − ٣ بحذف (- ٣) من الطرفين

∴ أ = ب ∴ د دالة أحادية

(٢) إذا كان أ ، ب ∈ ح - { ٥ } ، ر(أ) = $\frac{\text{٢ أ − ٣}}{\text{أ − ٥}}$ ، ر(ب) = $\frac{\text{٢ ب − ٣}}{\text{ب − ٥}}$

بوضع ر(أ) = ر(ب) ∴ $\frac{\text{٢ أ − ٣}}{\text{أ − ٥}}$ = $\frac{\text{٢ ب − ٣}}{\text{ب − ٥}}$ بالضرب التبادلى نجد



(٢ أ − ٣) (ب − ٥) = (أ − ٥) (٢ ب − ٣)

٢ أ ب − ٣ ب − ١٠ أ + ١٥ = ٢ أ ب − ١٠ ب − ٣ أ + ١٥

١٠ ب − ٣ ب = ١٠ أ − ٣ أ

∴ ٧ ب = ٧ أ ∴ أ = ب ∴ ر دالة أحادية

* اختبار الخط الأفقى :

تكون الدالة د : س ⟵ ص دالة احادية إذا قطع الخط الأفقى (الموازي لمحور السينات) عند كل عنصر من عناصر مدي الدالة يقطع منحنى الدالة فى نقطة واحدة .

مثال : بين أن كل من الدالتين ليست أحادية :

(١) د(س) = $س^٢$ + ٣　　　　(٢) ر(س) = $س^٢$ – ٥ س + ٦

الحل :

(١) د(س) = $س^٢$ + ٣

نكون الجدول الآتى :

س	-٣	- ٢	- ١	٠	١	٢
د(س)	١٢	٧	٤	٣	٤	٧

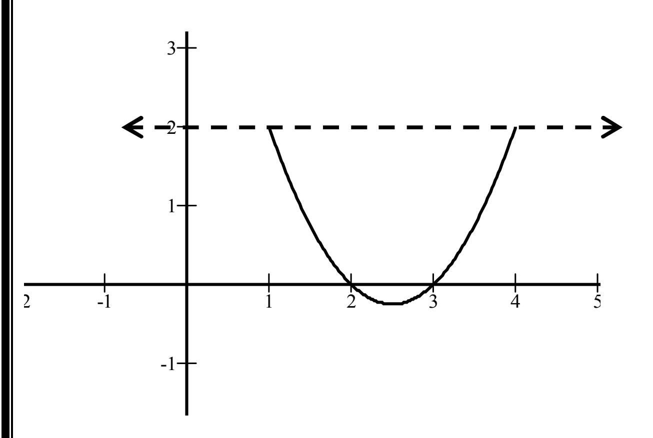
∵ د (١) = $١^٢$ + ٣ = ٤

، د (- ١) = $(-١)^٢$ + ٣ = ٤

∴ د(١) = د(- ١)

∵ - ١ ≠ ١　∴ د ليست أحادية .

ونلاحظ أن الخط الأفقى عند ص = ٤ يناظر قيمتين غير متساويتين للمتغير س هما – ١ ، ١



(٢) ر(س) = $س^٢$ – ٥ س + ٦

∵ ر(١) = $١^٢$ – ٥ × ١ + ٦ = ٢

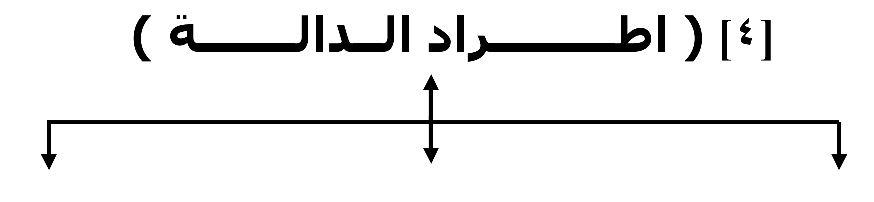
، ر(٤) = $٤^٢$ – ٥ × ٤ + ٦ = ٢

∴ ر(١) = ر(٤)　∵ ١ ≠ ٤

∴ ر دالة ليست أحادية

و نلاحظ أن الخط الأفقى عندما ص = ٢ يناظر قيمتين غير متساويتين للمتغير س هما ١ ، ٤

[٤] (اطـــــراد الـدالـــــة)



تزايدية تناقصية ثابتة

١ - (<u>الدالة التزايدية</u>) ⇦ يقال للدالة أنها تزايدية فى الفترة [ﻢ ، ب]

إذا كان لكل $س_١$ ، $س_٢$ ∈ [ﻢ ، ب] يتحقق الشرط الآتى :

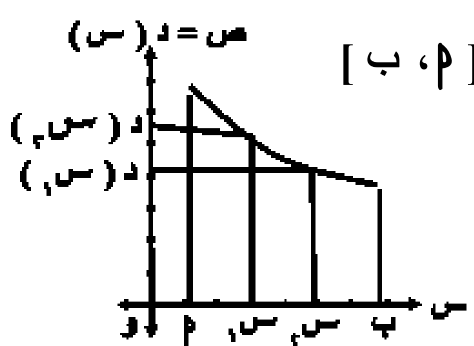
إذا كان $س_١ < س_٢$ ⇦ $د (س_١) < د (س_٢)$

☜ <u>وبصفة عامـــة</u> : د (س) تكون تزايدية إذا كانت :

قيمة الدالة تتزايد بإزدياد قيمة س .

☜ <u>وبطريقة أخرى</u> : د (س) تكون تزايدية إذا كان المماس لمنحنى الدالة يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

٢- (<u>الدالة التناقصية</u>) ⇦ يقال للدالة أنها تناقصية فى الفترة [ﻢ، ب]



إذا كان لكل $س_١$ ، $س_٢$ ∈ [ﻢ، ب]

يتحقق الشرط الآتى :

إذا كان $س_١ < س_٢$ ⇦ $د (س_١) > د (س_٢)$

☜ <u>وبصفة عامـــة</u> : د (س) تكون تناقصية إذا كانت :قيمة الدالة تتناقص بإزدياد قيمة س .

<u>وبطريقة أخرى</u> : د (س) تكون تناقصية إذا كان المماس لمنحنى الدالة يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

٣- (الدالة الثابته) ⇦ يقال للدالة أنها ثابته فى الفترة [٢ ، ب]

د (س) = أ

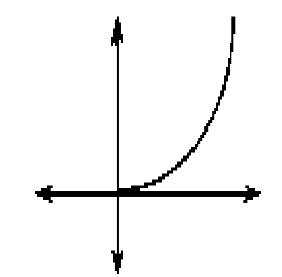
إذا كان لكل س ١ ، س ٢ ∋ [٢ ، ب]

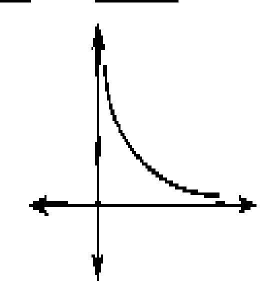
يتحقق الشرط الآتى : إذا كان س ١ > س ٢ ⇦ د (س ١) = د (س ٢) = ٢

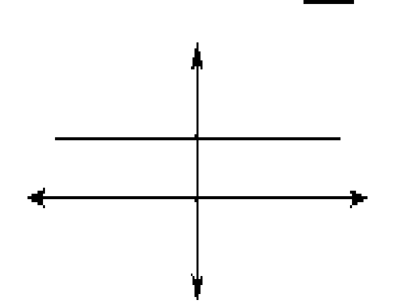
وبصفة عامـــة : د (س) تكون ثابتة إذا كانت قيمة الدالة ثابتة مهما كانت قيمة س .

الخلاصة :

يقصد باطراد الدوال معرفة الفترات التى تكون عندها الدالة : متزايدة أو متناقصة أو ثابتة







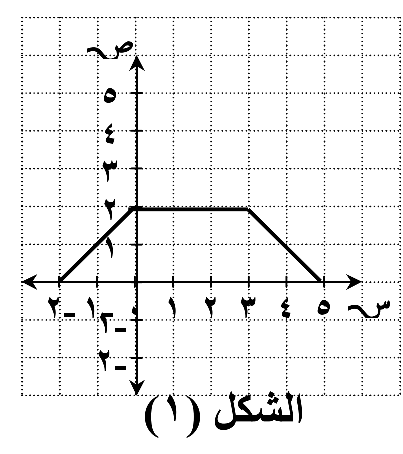
(١) الدالة تكون متزايدة إذا كان كلما اتجهنا من اليسار إلى اليمين يصعد المنحنى لأعلى

(٢) الدالة تكون متناقصة إذا كان كلما اتجهنا من اليسار إلى اليمين يهبط المنحنى لأسفل

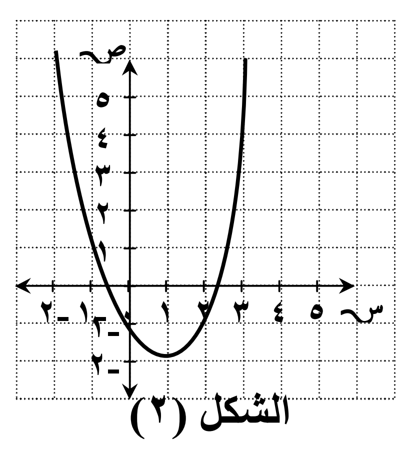
(٣) الدالة تكون ثابتة إذا كان منحنى الدالة خط مستقيم يوازى محور السينات .

تذكرأن: المجال و فترات الاطراد تقرأ على محور السينات أما المدى يقرأ على محور الصادات

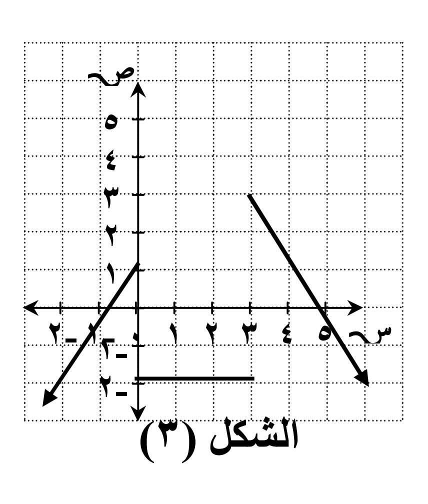
مثال : ابحث اطراد كلا من الدوال الاتية مع ذكر المدى :



الشكل (١)



الشكل (٢)



الشكل (٣)

الحل :

فى الشكل (١) : المدى = [٠ ، ٢]

الاطراد : الدالة متزايدة فى [- ٢ ، ٠] ، ثابتة فى [٠ ، ٣] ، متناقصة فى [٣ ، ٥]

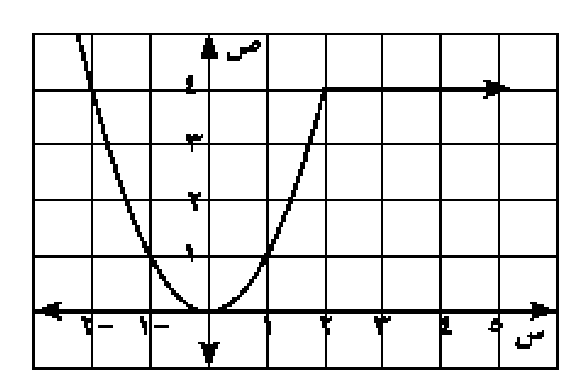
فى الشكل (٢) : المدى = [- ٢ ، ∞ [

الاطراد : متزايدة فى [١ ، ∞ [، متناقصة فى] - ∞ ، ١]

فى الشكل (٣) : المدى =] – ∞ ، ٣]

الاطراد : الدالة متزايدة فى] - ∞ ، ٠] ، متناقصة فى [٣ ، ∞ [، ثابتة فى [٠ ، ٣]

مثال : ابحث إطراد الدالة الممثلة فى الشكل البيانى المقابل.



الحل

- الدالة تناقصية فى الفترة]-∞، ٠[
- الدالة تزايدية فى الفترة]٠، ٢[
- الدالة ثابتة فى الفترة]٢، ∞[

تمارين على بعض خواص الدوال

[١] ابحث نوع الدوال الآتية من حيث زوجية أو فردية أو غير ذلك . (جبرياً)

[١] د(س) = ٢ – $س^{٢}$ [٢] د(س) = $\sqrt[٤]{س}$ [٣] د(س) = $\frac{س^{٣} \text{ حا } ٣ س}{١ + س^{٤}}$

[٤] د(س) = $\begin{cases} س - ٣ & \leftarrow س > ٠ \\ -س - ٣ & \leftarrow س < ٠ \end{cases}$ [٥] د(س) = $س^{٣}$ + حتا س

[٦] د(س) = $\sqrt{س^{٢} + ٦}$ [٧] د(س) = $\begin{cases} س - ١ & \leftarrow س \geqslant ٠ \\ ٧ س & \leftarrow س < ٠ \end{cases}$

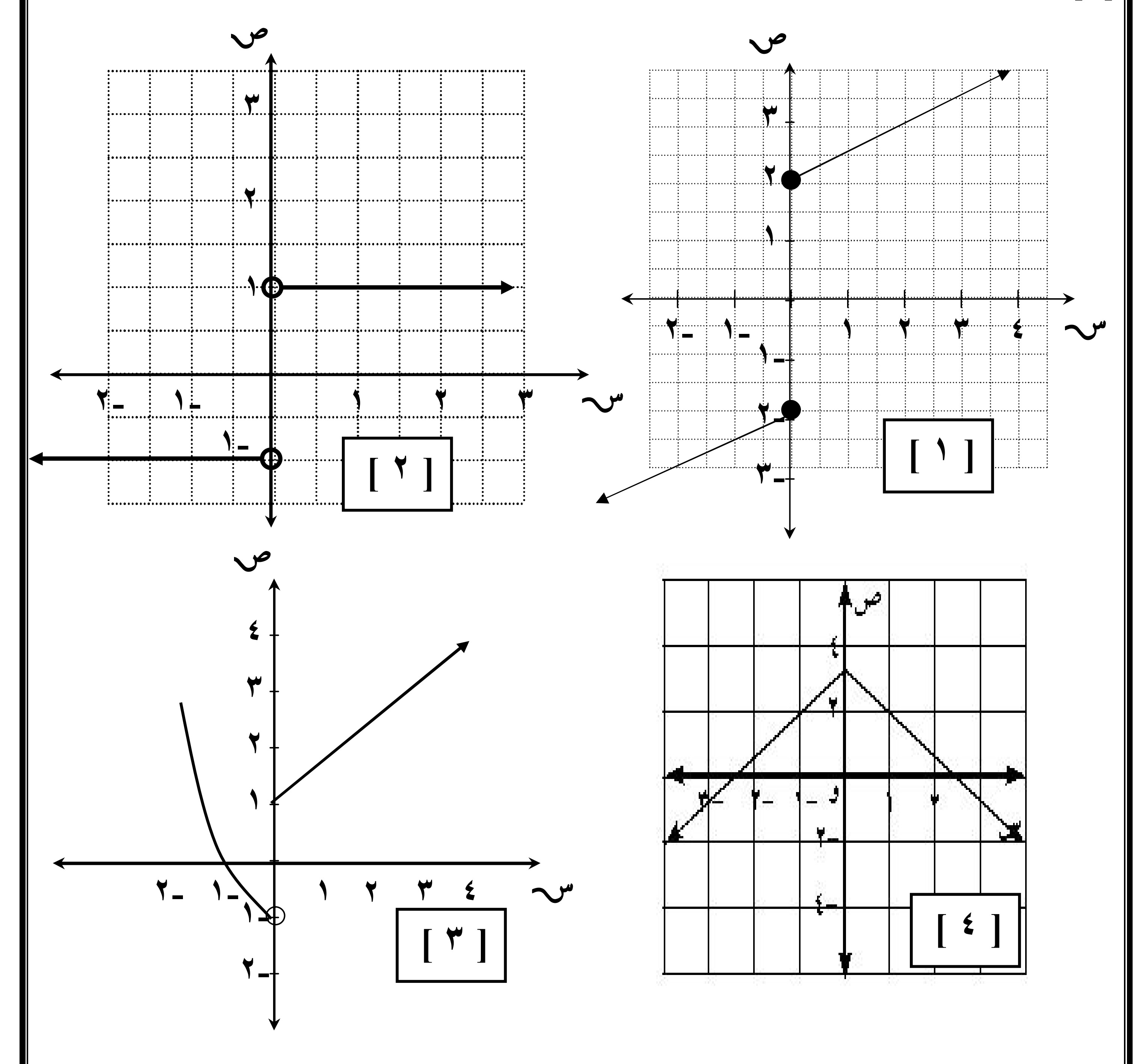
[٨] د(س) = س حتا س

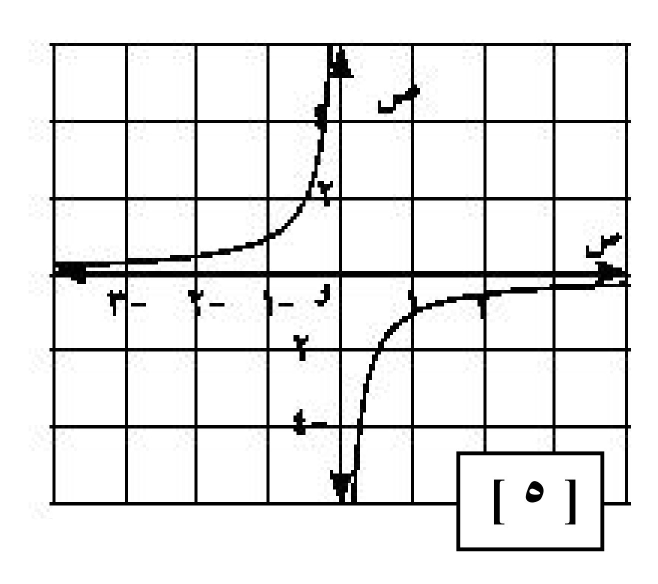
[٢] حدد الدوال الأحادية المعرفة كما يلى مع ذكر السبب ؟

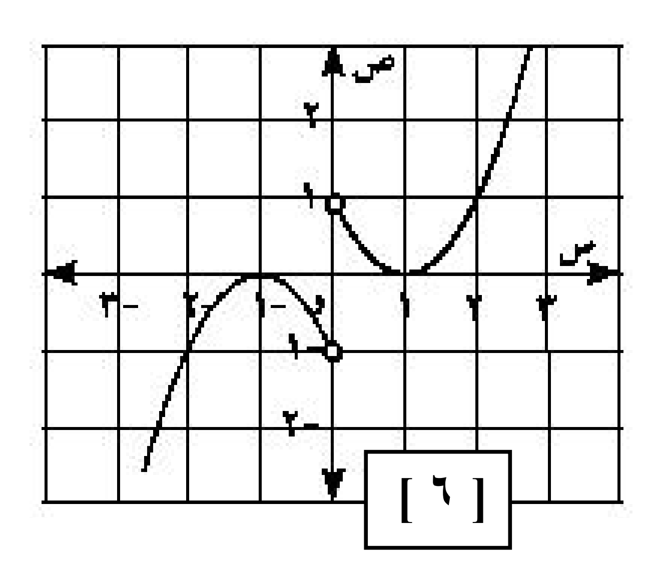
(١) د(س) = ٣ س + ١ (٢) د(س) = ٢ $س^٢$ – س – ٣

(٣) د(س) = $س^٤$ + ٢ س + ١ (٤) د(س) = $\frac{٢ س + ١}{س – ١}$

[٣] أوجد مدى كل دالة وبين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :







[٤] ارسم كل من الدوال المعرفة كما يلى ثم بين أى منها زوجية و أى منها فردية و أيها غير ذلك و تحقق من ذلك جبريا .

(أ) د(س) = { ٢ عندما س > ٠ ، ـ ٢ عندما س< ٠ }

(ب) د(س) = { ـ س عندما س ⩽ ٠ ، س عندما س< ٠ }

(جـ) د(س) = { س ـ ١ عندما س ⩽ ٠ ، ٧ س عندما س< ٠ }

(د) د(س) = { قانون الجيب (قاعدة الجيب) ، س + ١ عندما س ⩽ ٠ }

[٥] باستخدام أحد البرامج الرسومية ؛ ارسم منحنى الدالة د فى كل من ما يأتى ، ومن الرسم استنتج اطراد ومداها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

(أ) د(س) = س^{٢} - ٥　　(ب) د (س) = ٤ - س^{٢}　　(ج) د(س) = (س -١)^{٢} + ١

(د) د (س) = س^{٢}　　(هـ) د(س) = س^{٢} - ٣س　　(و) د(س) $\frac{-١}{س - ٢}$

[٦] اذا كانت د : [-٢ ، ٦] ⟵ ح

د(س) = { ٤ - س عندما س < ١ ، س عندما ١ ⩽ س ⩽ ٦ }

(أ) ارسم الشكل البياني للدالة د ، واستنتج من الرسم مدى الدالة وابحث اطرادها.

(ب) هل د دالة احادية؟ فسر اجابتك.

التمثيل البيانى للدوال و التحويلات الهندسية

الدالة كثيرة الحدود :

سبق أن درست الدالة كثيرة الحدود التى قاعدتها على الصورة :

$د(س) = أ_. + أ_١ س + أ_٢ س^٢ + أ_٣ س^٣ + ٠٠٠٠ + أ_ن س^ن$

حيث : $أ_.$ ، $أ_١$ ، $أ_٢$ ، ٠٠٠٠ ، $أ_ن \in ح$ ، $أ_ن \neq ٠$

وعلمنا أن المجال و المجال المقابل هو ح (مالم يذكر خلاف ذلك) و لذلك تسمى هذه الدوال بدوال كثيرة الحدود من الدرجة ن ، و درجة كثيرة الحدود هى أعلى قوة يأخذها المتغير المستقل س

ملاحظات هامة :

١) إذا كان د(س) = أ ، أ $\neq$ ٠ فإن د تسمى دالة كثيرة الحدود الثابتة .

٢) دوال كثيرة الحدود من الدرجة الأولى تسمى دوالا خطية ، و من الدرجة الثانية تسمى دوالا تربيعية ، ومن الدرجة الثالثة تسمى دوالا تكعيبية .

٣) عند جمع أو طرح دوال قوى مختلفة و ثوابت ، نحصل على دالة كثيرة الحدود .

٤) أصفار الدالة كثيرة الحدود هى الاحداثيات السينية لنقط تقاطع منحنيها مع محور السينات.

٥) تتساوى دالتا كثيرتا الحدود د ، ر إذا كان لهما الدرجة نفسها و كانت معاملات قوى س المتناظرة فيهما متساوية .

مثال : إذا كان د ، ر كثيرتا حدود حيث $د(س) = (أس + ٥)^٢$

، $ر(س) = ٩ س^٢ + ٣٠ س + جـ - ٤$ ، و كان د(س) = ر(س) أوجد قيمتى أ ، جـ

الحل :

$د(س) = (أس + ٥)^٢ = أ^٢ س + ١٠ أس + ٢٥$

$\because$ د(س) = ر(س) $\therefore$ $أ^٢ س + ١٠ أس + ٢٥ = ٩ س^٢ + ٣٠ س + جـ - ٤$

$\therefore$ معاملات قوى س المتناظرة متساوية .

و بمقارنة معامل س نجد : ١٠ أ = ٣٠ $\therefore$ أ = ٣

، مقارنة الحد المطلق : جـ - ٤ = ٢٥ $\therefore$ جـ = ٢٩

* رسم منحنيات الدوال *

أولا رسم منحنيات دالة كثيرة الحدود :

أولا : الدالة الثابتة

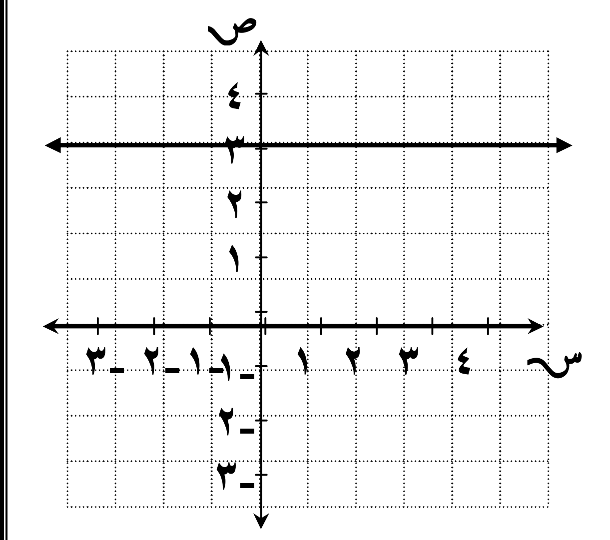
الصورة العامة للدالة الثابتة هى د(س) = أ حيث أ ثابت لكل س ∋ ح*
و تمثل بيانيا بمستقيم يوازى محور السينات
و يقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، أ)

ص
(٠، أ)
د(س) = أ
س

كما فى الشكل الموضح :
مجالها = ح ، مداها = { أ } ، الدالة زوجية

و هى الدالة الوحيدة التى مداها نقطة أو مجموعة من النقاط

ملحوظة : إذا كانت أ موجبة فإن المستقيم يكون أعلى محور السينات
، و إذا كانت أ سالبة فإن المستقيم يكون أسفل محور السينات



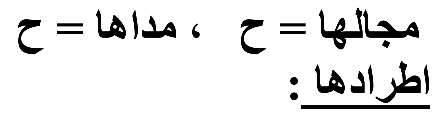
مثال : ارسم الدالة د حيث د(س) = ٣ ومن الرسم

عين المدى والاطراد والنوع

الحل :
المدى = { ٣ }
ثابتة على مجالها
زوجية لتماثلها حول محور الصادات

ثانيا : دالة الدرجة الأولى أو (الدالة الخطية

الصورة العامة للدالة الخطية هى د(س) = أ س + ب لكل س ∋ ح ، أ ≠ ٠
و تمثل بخط مستقيم ميله = أ ، ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، ب) و يقطع محور السينات فى النقطة ($\frac{-ب}{أ}$ ، ٠) ، ب الجزء المقطوع من محور الصادات



مجالها = ح ، مداها = ح

اطرادها :

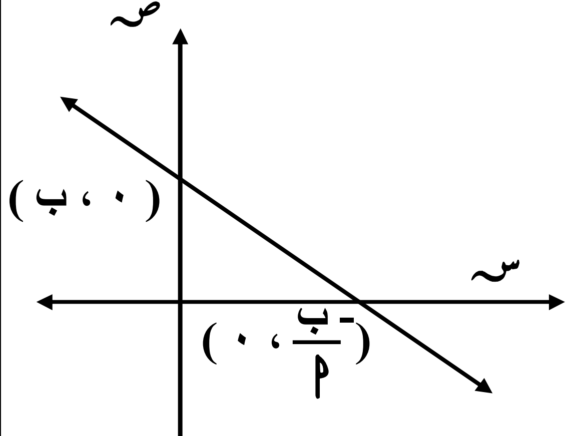
الدالة تزايدية عندما م > ٠ (موجبة)

مثلا : الدالة د(س) = ٣ س – ٢ متزايدة

الدالة تناقصية عندما م < ٠ (سالبة)

مثلا : الدالة د(س) = ٢ – ٣ س متناقصة

نوعها :



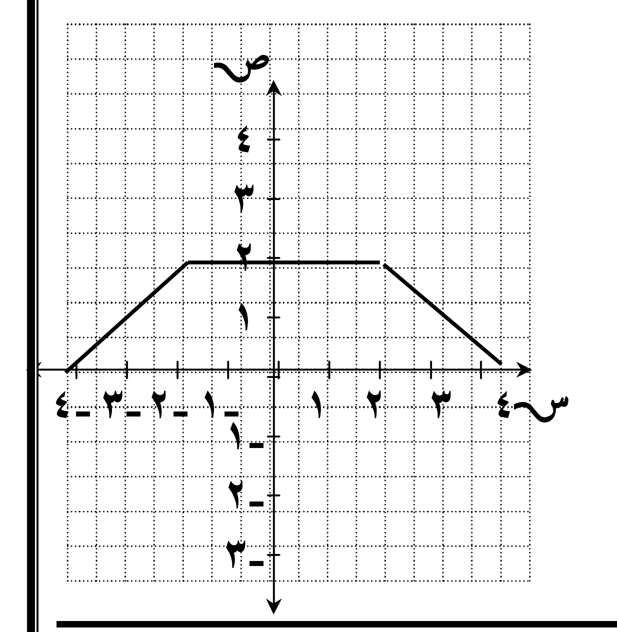
الدالة ليست زوجية و ليست فردية بصفة عامة و لكنها فردية عندما ب = ٠

مثال : ارسم الدالة د(س) =

س + ٤ ، س ∈ [- ٤ ، - ٢]
٢ ، س ∈] – ٢ ، ٢ [
٤ – س ، س ∈ [٠ ، ٢]

و من الرسم استنتج مدى الدالة و اطرادها و نوعها .

الحل:



المجال = [- ٤ ، ٤] ، المدى = [٠ ، ٢]

الدالة متزايدة فى [- ٤ ، - ٢] ، ثابتة فى] – ٢ ، ٢ [

، تناقصية فى] ٢ ، ٤]

الدالة زوجية لانها متماثلة حول محور الصادات

مثال : ارسم المنحنى للدالة د(س) =

س + ٢ ، س ⩾ ٠
س ـ ٢ ، س < ٠

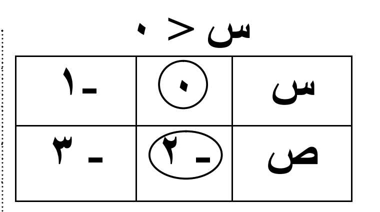
و من الرسم استنتج مدى الدالة و اطرادها و نوعها

الحل :

س ⩾ ٠

س	٠	١
ص	٢	٣

س < ٠



س	⓪	١-
ص	٢- (مُحاطة بدائرة)	٣ -

مجال الدالة = ح

مدى الدالة =] - ∞ ، - ٢ [∪ [٢ ، ∞ [

أو　ح - [- ٢ ، ٢ [

الدالة تزايدية على مجالها

الدالة ليست فردية و ليست زوجية

ثالثا: دالـة المقياس (القيمة المطلقة)

*** (مفهوم المقياس) ⇦ هو عدد حقيقى غير سالب (≤ ٠)**

*** (المقياس العـدد) ⇦ هو الجذر التربيعى الموجب لمربع هذا العدد . | س | = $\sqrt{س^2}$**

مثلا: | - ٥ | = $\sqrt{٢٥}$ ، | ٣ | = $\sqrt{٩}$ = ٣ ، | ٠ | = ٠ ، | $\frac{١}{٢}$ | = $\frac{١}{٢}$

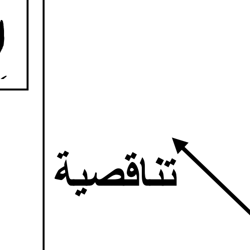
*** رسم دالة المقياس : (خواص دالة المقياس)**

الصورة العامة هى : د(س) = ك | س - ∤ | + ب　، ك = ± ١

تمثل بيانيا بشعاعين من النقطة (∤ ، ب) هى نقطة رأس المنحنى (∤ ، ب)

∤ = الازاحة السينية ، ب = الازاحة الصادية ، معادلة محور التماثل هو س = ∤

ك > ٠ (موجبة)

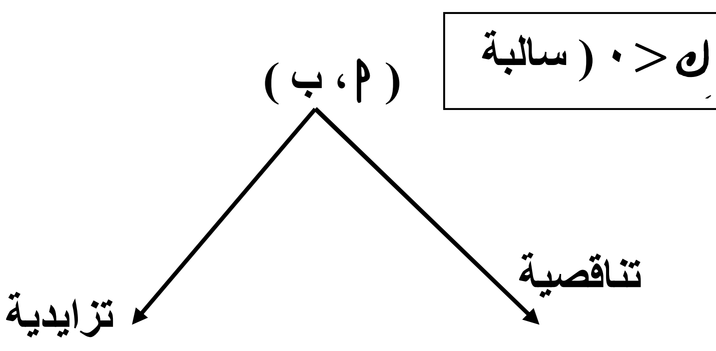


مدى الدالة = [ب ، ∞ [

الدالة تزايدية فى [أ ، ∞ [

الدالة تناقصية فى] - ∞ ، أ]

ك < ٠ (سالبة)



مدى الدالة =] - ∞ ، ب]

الدالة تزايدية فى] - ∞ ، أ]

الدالة تناقصية فى [أ ، ∞ [

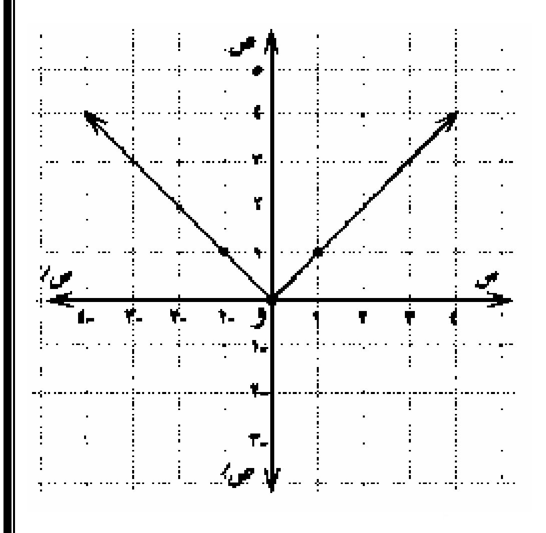
مثال : ارسم منحنى الدالة د(س) = |س| ومن الرسم استنتج مدى الدالة واطرادها ونوعها .

الحل : تمثل بيانياً بشعاعين من النقطة ($\frac{-ب}{أ}$ ، جـ) = (٠ ، ٠)

مجال الدالة = ح　　　مدى الدالة = [٠ ، ∞ [

] - ∞ ، ٠ [تناقصية　　　] ٠ ، ∞ [تزايدية

الدالة زوجية لتماثلها حول محور الصادات .



ارسم منحنى الدالة د(س) = | س - ٣ | ومن الرسم استنتج مدى الدالة واطرادها ونوعها

الحل :

تمثل بيانياً بشعاعين

من النقطة (٣ ، ٠)

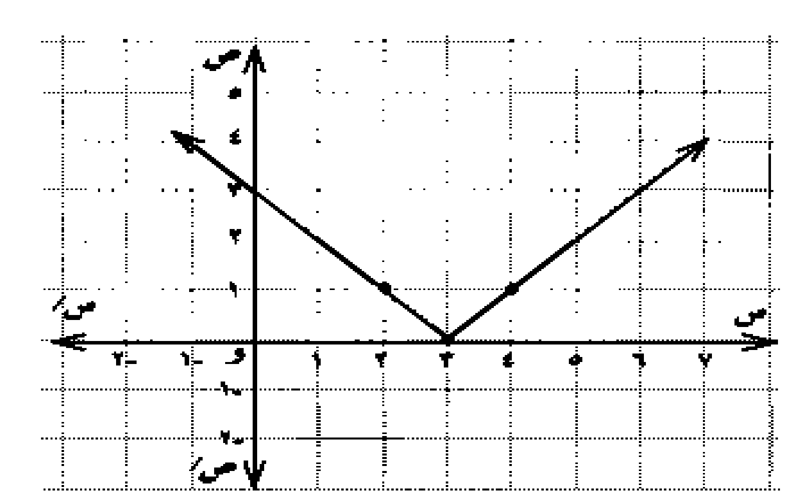
مجال الدالة = ح

مدى الدالة = [٠ ، ∞ [

] - ∞ ، ٣ [تناقصية

] ٣ ، ∞ [تزايدية

الدالة ليست زوجية وليست فردية

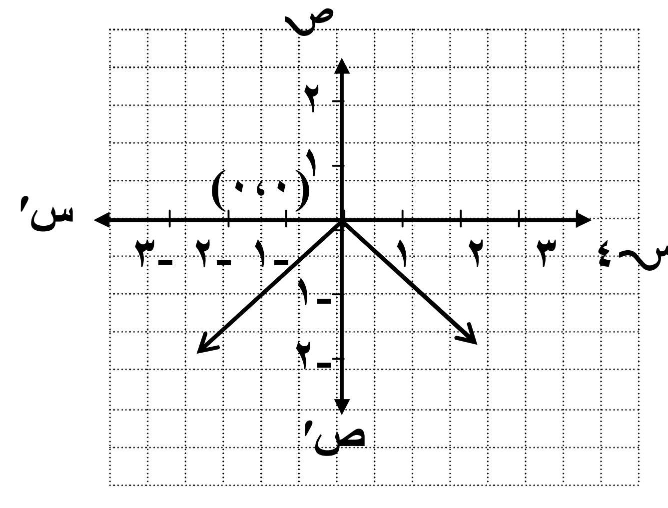


حل آخر :منحنى هذه الدالة نفس منحنى |س| و لكن بازاحة ثلاث وحدات فى الاتجاة الموجب لمحور السينات . الازاحة السينية = ٣ ، و الازاحة الصادية = ٠
ثم نكمـــل الحل كما سبق .

ملحوظة :

الازاحة على محور السينات = صفر المقياس
الازاحة على الصادات = العدد خارج المقياس (العدد المضاف الى المقياس)

مثال : ارسم منحنى الدالة د(س) = - | س | مع ذكر المجال والمدى
ابحث اطرادها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

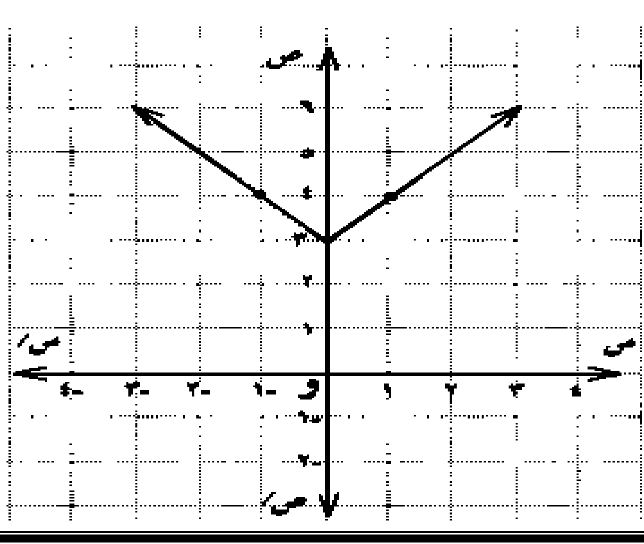


الحل:
رأس المنحنى (٠ ، ٠)
المجال ح
المدى =]- ∞ ، ٠]
د متزايدة فى]- ∞ ، ٠[
د متناقصة فى]٠ ، ∞[
د زوجية لأنها متماثلة حول محور الصادات
تمثل بيانيا شعاعين بدايتهما نقطة الأصل فى الربع الثالث و الرابع و ينصفان الزاوية بين المحورين

- **التحويلات الهندسية لدالة المقياس .**

*** الازاحة الرأسية (فى اتجاه محور الصادات) :**

مثال : ارسم منحنى الدالة د(س) = | س | + ٣ مع ذكر المجال والمدى ابحث اطرادها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك .

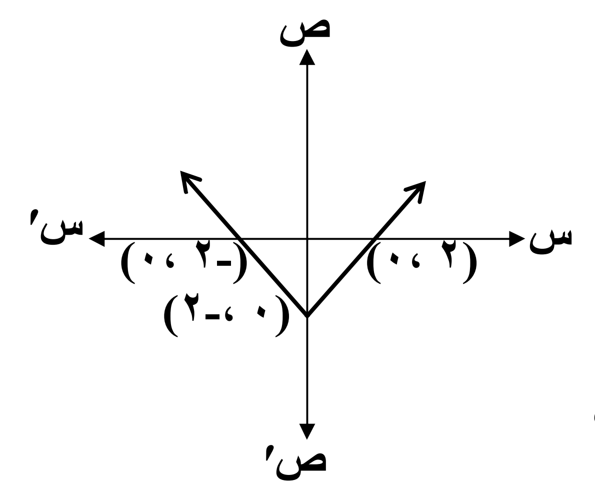


الحل :
تمثل بيانياً بشعاعين من
النقطة ($\frac{-ب}{أ}$ ، جـ) = (٠ ، ٣)
مجال الدالة = ح
مدى الدالة = [٣ ، ∞ [
] − ∞ ، ٠ [تناقصية
] ٠ ، ∞ [تزايدية
الدالة زوجية لتماثلها حول محور الصادات

حل آخر : الازاحة السينية = ٠ ، الازاحة الصادية = ٣
∴ مبدا الشعاعين (٠ ، ٣) تسمى نقطة الرأس للمنحنى نكمل الحل بنفس الحل

مثال : ارسم منحنى الدالة د(س) = | س | -٢ مع ذكر المجال والمدى ثم ابحث اطرادها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

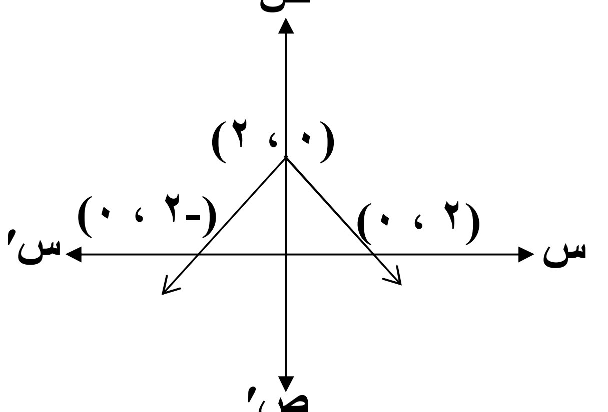
الحل :



نقطة الرأس (٠ ، - ٢)
المجال ح
المدى = [-٢ ، ∞ [
د متناقصة فى]- ∞ ، ٠]
د متزايدة فى [٠ ، ∞ [
د زوجية لأنها متماثلة حول محور الصادات

مثال : ارسم منحنى الدالة د(س) = ٢ - | س | مع ذكر مجال و مدى الدالة .
ابحث اطرادها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

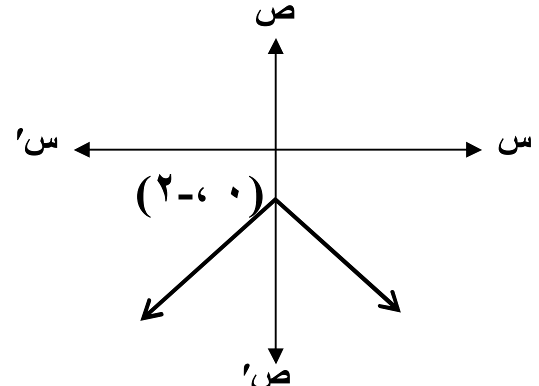
الحل :



المجال ح
المدى =]- ∞ ، ٢]
د متزايدة فى]- ∞ ، ٠]
د متناقصة فى [٠ ، ∞ [
د زوجية لأنها متماثلة حول محور الصادات

مثال : ارسم منحنى الدالة د(س) = - | س | - ٢ مع ذكر المجال والمدى
ابحث اطرادها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

الحل :



المجال ح
المدى =]- ∞ ،-٢]
د متزايدة فى]- ∞ ، ٠]
د متناقصة فى [٠ ، ∞ [
د زوجية لأنها متماثلة حول محور الصادات

* **الازاحة الأفقية (فى اتجاه محور السينات):**

مثال : ارسم منحنى الدالة د(س) = | س – ٢ | مع ذكر المجال والمدى
ابحث اطرادها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

(الحل)

الازاحة السينية = ٢ ، الصادية = ٠ ∴ راس المنحنى (٢ ، ٠)
المجال ح
المدى = [٠ ، ∞ [
د متناقصة فى]- ∞ ، ٢]
د متزايدة فى [٢ ، ∞ [
د لازوجية ولافردية

ص
(٠ ، ٢)
س′ س
(٢ ، ٠)
ص′

مثال : ارسم منحنى الدالة د(س) = | س + ٢ | مع ذكر المجال والمدى
ابحث اطرادها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

(الحل)

الازاحة السينية = - ٢ ، الصادية = ٠ ، راس المنحنى (- ٢ ، ٠)
المجال ح
المدى = [٠ ، ∞ [
د متناقصة فى]- ∞ ، -٢]
د متزايدة فى [-٢ ، ∞ [
د لازوجية ولافردية

ص
(٠ ، ٢)
س′ س
(-٢ ، ٠)
ص′

مثال : ارسم منحنى الدالة د(س) = - | س – ٢ | مع ذكر المجال والمدى
ابحث اطرادها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

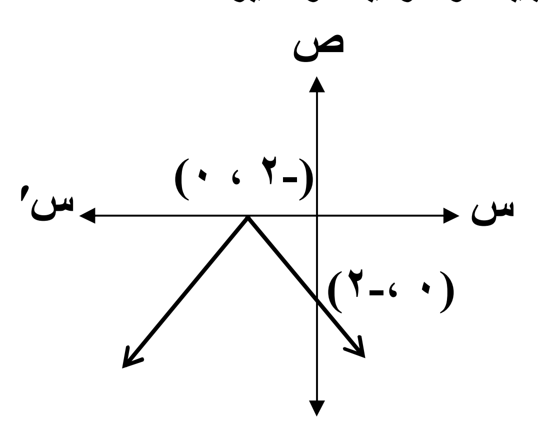
(الحل)

نقطة رأس المنحنى (٢ ، ٠)
المجال ح ، المدى =]- ∞ ، ٠]
د متزايدة فى]- ∞ ، ٢] ، د متناقصة فى [٢ ، ∞ [
د لازوجية ولافردية

ص
(٢ ، ٠)
س′ س
(٠ ، -٢)
ص′

مثال : ارسم منحنى الدالة د(س) = - | س + ٢ | مع ذكر المجال والمدى
ابحث اطرادها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

(الحل)

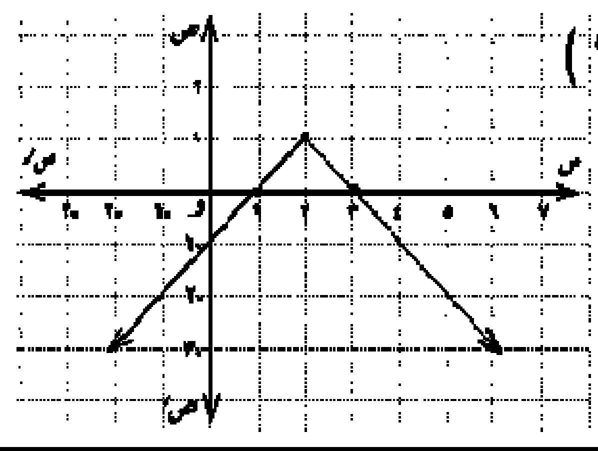


نقطة راس المنحنى (- ٢ ، ٠)
المجال ح
المدى =]- ∞ ، ٠[
د متزايدة فى]- ∞ ، -٢[
د متناقصة فى [-٢ ، ∞ [
د لازوجية ولافردية

* الازاحة الأفقية و الرأسية (فى اتجاهى محورى الاحداثيات) :

مثال : ارسم منحنى الدالة د(س) = - | س + ٢ | +٣ مع ذكر المجال والمدى
ابحث اطرادها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

(الحل)



الازاحة السينية = - ٢ ، الازاحة الصادية = ٣
المجال ح
المدى =]- ∞ ، ٣]
د متزايدة فى]- ∞ ، - ٢[
د متناقصة فى [-٢ ، ∞ [
د لازوجية ولافردية

مثال : ارسم منحنى الدالة د (س) = ١ - |س - ٢|
الحل :

تمثل بيانياً بشعاعين من النقطة ($\frac{-ب}{أ}$ ، جـ) = (٢ ، ١)

مجال الدالة = ح مدى الدالة =]- ∞ ، ١]

]- ∞ ، ٢ [تزايدية [٢ ، ∞ [تناقصية

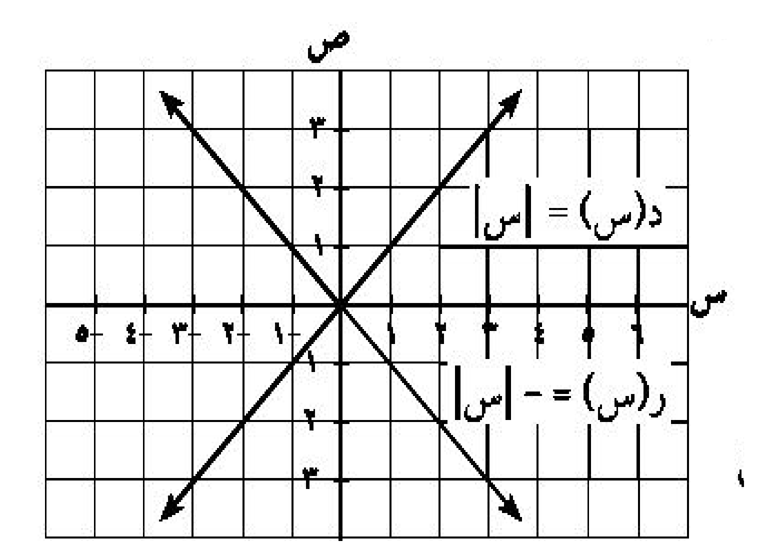
الدالة لا فردية ولا زوجية

• انعكاس دالة المقياس :

منحنى الدالة ر حيث ر(س) = ـ | س |

هو انعكاس لمنحنى الدالة د(س)

حيث د(س) = | س |على محور السينات

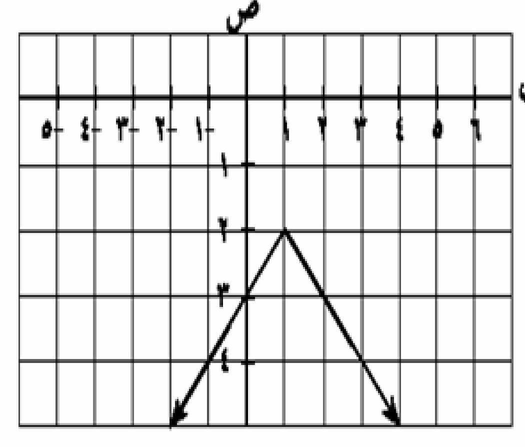


مثال : استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = | س | لتمثيل كل من الدالتين ر ، ع حيث :

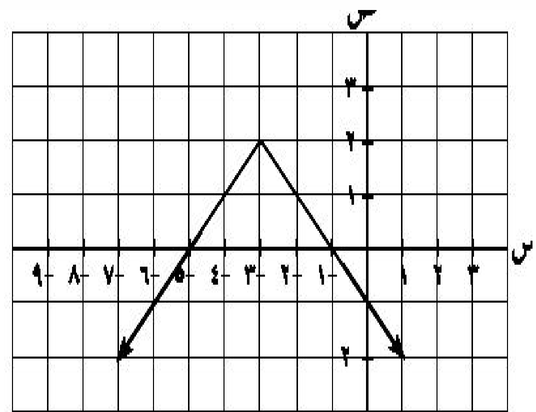
(أ) ر(س) = ـ | س – ١ | - ٢ (ب) ع(س) = ٢ - | س + ٣ |

الحل :

(أ) منحنى ر(س) هو إنعكاس لمنحنى د(س) على محور السينات ثم إزاحة وحدة واحدة أفقية إلى اليمين و٢ وحدة رأسية إلى أسفل.



(ب)منحنى ع (س) هو انعكاس لمنحنى د(س) على محور السينات ثم إزاحة ٣ وحدات أفقية إلى اليسار و٢ وحدة رأسية إلى أعلى.



الدالة التربيعية

إذا كانت : الصورة العامة هى د(س) = ؋ (س ـ ب) ^٢^ + جـ ، ؋ ≠ ٠

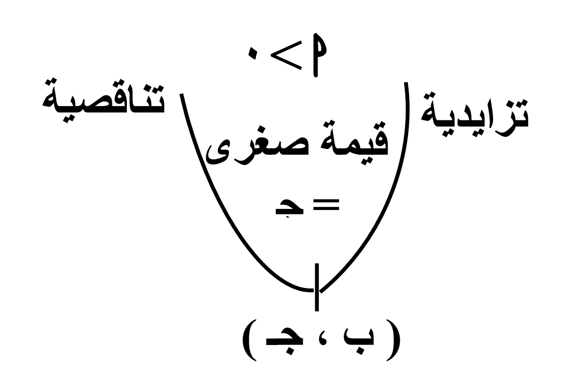
تمثل بيانيا بمنحنى ذو فرعين لأعلى أو لأسفل

و تكون نقطة الرأس المنحنى = (ب ، جـ)

، معادلة خط التماثل هى س = ب

الازاحة السينية (الانتقال فى اتجاه محور السينات) = ب

، الازاحة الصادية (الانتقال فى اتجاه محور الصادات) = جـ

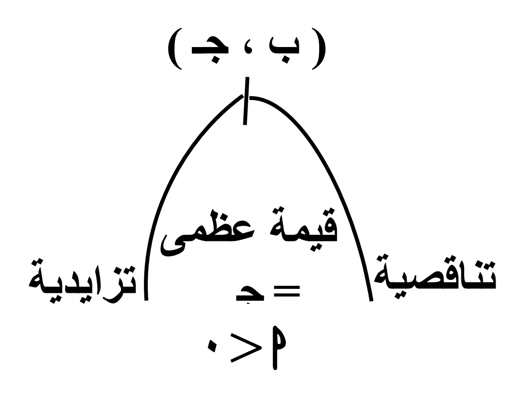


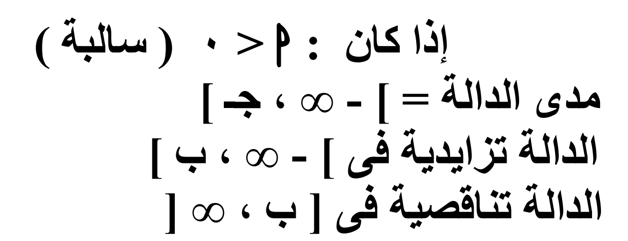
إذا كان : ؋ > ٠ (موجبة)

مدى الدالة = [جـ ، ∞ [

الدالة تزايدية فى [ب ، ∞ [

الدالة تناقصية فى] - ∞ ، ب]





إذا كان : ؋ < ٠ (سالبة)

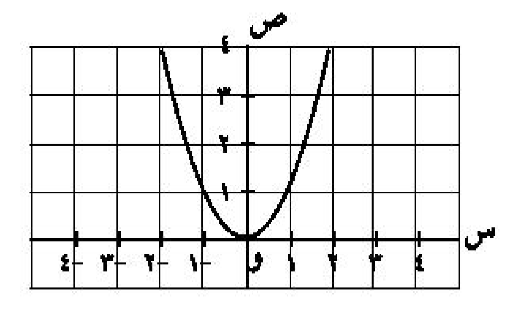
مدى الدالة =] - ∞ ، جـ]

الدالة تزايدية فى] - ∞ ، ب]

الدالة تناقصية فى [ب ، ∞ [

الشكل التالى يمثل أبسط صورة لمنحنى الدالة التربيعية د حيث.

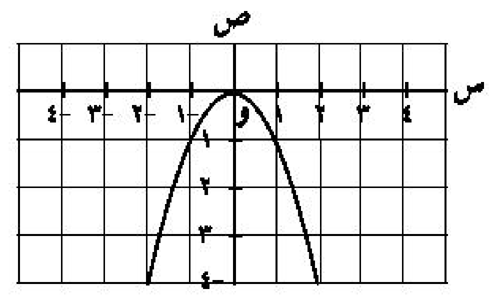
د (س) = س^٢^



➤ ا = ١ ، ب = ٠ ، جـ = ٠

➤ نقطة رأس المنحنى هى (٠ ، ٠).

ومنحنى الدالة د حيث (س) = -س^٢^ هو انعكاس لمنحنى د (س) = س^٢^ في محور السينات حيث



➤ ا = -١ ، ب = ٠ ، جـ = ٠

➤ نقطة رأس المنحنى هى (٠ ، ٠).

- منحنى الدالة متماثل حول محور الصادات وبالتالى فإن الدالة زوجية.
- مدى الدالة = [٠ ، ∞ [
- الدالة تناقصية فى]-∞ ، ٠[وتزايدية فى]٠ ، ∞ [

- منحنى الدالة متماثل حول محور الصادات وبالتالى فإن الدالة زوجية.
- مدى الدالة =]-∞ ، ٠]
- الدالة تزايدية فى]-∞ ، ٠[وتناقصية فى]٠ ، ∞ [

ملاحظات :

١. لرسم د(س) = أ(س - ب)^{٢}+ جـ نحدد نقطة رأس المنحنى هى (ب ، جـ)

٢. الدالة التربيعية و دالة المقياس لهما نقطة رأس للمنحنى

٣. المنحنى د(س) = س^{٢} هو انعكاس للمنحنى د(س) = ـ د(س) فى محور السينات

٤. يجب وضع الدالة فى صورتها العامة (القياسية) قبل رسمها مثلا :

د(س) = س^{٢} +٦ س +٧ = (س^{٢} +٦ س+٩)+ ٧-٩ = (س+ ٣)^{٢}- ٢

د(س) = - س^{٢}-٤ س+ ٥ = - (س^{٢} +٤ س - ٥)

= - {(س^{٢} + ٤س+٤) – ٥ -٤} = - {(س+٢)^{٢} – ٩} = - (س+٢)^{٢}+٩

٥. لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات نضع س = ٠ فى معادلة المنحنى

- **إزاحة منحنى الدالة فى اتجاه محور س (إزاحة أفقية) :**

مثال : استخدم منحنى الدالة د(س) = س^{٢} لتمثيل الدالتين ر ، ع حيث :

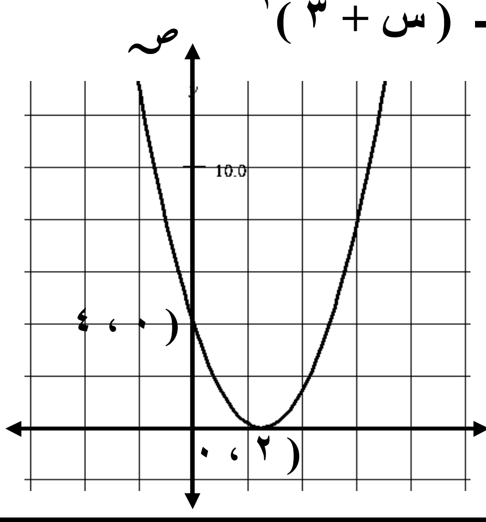


(١) ر(س) = (س – ٢)^{٢} (٢) ع(س) = ـ (س + ٣)^{٢}

الحل :

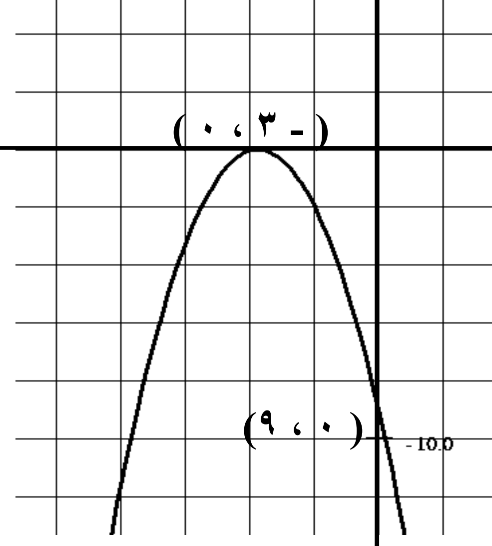
(١) ر(س) = (س – ٢)^{٢}

هو منحنى د(س) = س^{٢} بإزاحة وحدتين فى الاتجاه الموجب لمحور السينات .





(٢) ع(س) = ـ (س + ٣)^{٢}



هو منحنى د(س) = س^{٢} بالانعكاس فى محور السينات

ثم ازاحته بثلاث وحدات فى الاتجاه السالب لمحور السينات

* إزاحة منحنى الدالة فى اتجاه محور ص (إزاحة رأسية) :

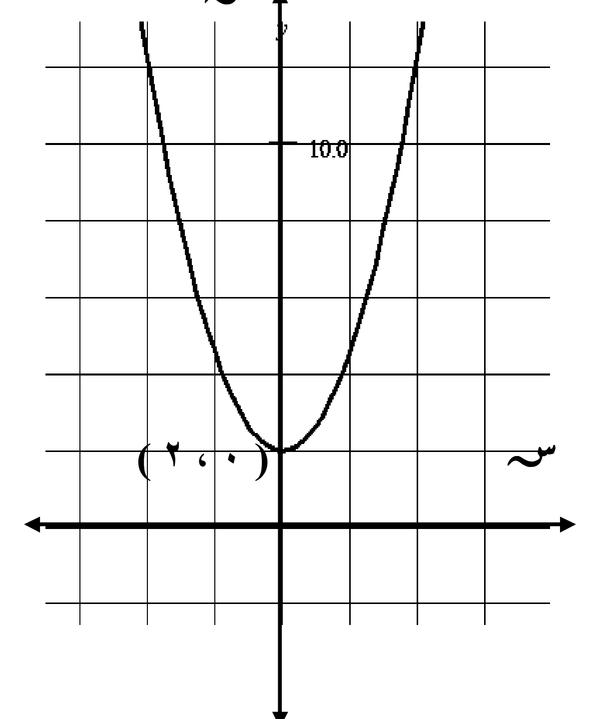
مثال : استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) س^{٢} لتمثيل كل من الدالتين ر ، ع حيث :

(١) ر(س) = س^{٢} + ٢   (٢) ع(س) = ـ س^{٢} ـ ١

و من الرسم عين نقطة رأس المنحنى و أوجد مدى الدالة .

الحل :

(١) ر(س) = س^{٢} + ٢



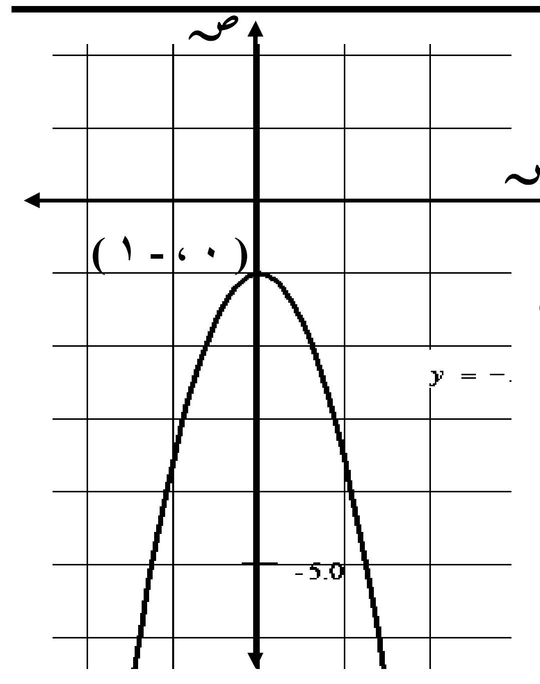
هو منحنى د(س) = س^{٢} بازاحة وحدتين فى

الاتجاه الموجب لمحور الصادات

نقطة رأس المنحنى هى (٠ ، ٢)

، المدى = [٢ ، ∞ [

(٢) ع(س) = ـ س^{٢} ـ ١



هو منحنى د(س) = س^{٢} بالانعكاس فى محور السينات

ثم ازاحة وحدة واحدة فى الاتجاه السالب لمحور الصادات

نقطة رأس المنحنى هى (٠ ، - ١)

، المدى =] - ∞ ، - ١]

* إزاحة منحنى الدالة فى اتجاهى محورى الإحداثيات :

مثال : ارسم منحنى الدالة د(س) = ٢ - (س - ١)^{٢} أوجد رأس المنحنى و المدى و الاطراد ونوع الدالة و معادلة محور التماثل .

الحل :

الازاحة السينية = ١ ، الازاحة الصادية = ٢

∴ راس المنحنى (١ ، ٢)

للرسم بدقة نوجد نقطة التقاطع مع محور الصادات

و ذلك بوضع س = ٠ ⟵ (٠ ، ١)

و على نفس المسافة من محور التماثل

و نستنتج النقطة (٢ ، ١)

المجال = ح

المدى =] - ∞ ، ٢]

الاطراد : متزايدة فى] - ∞ ، ١]

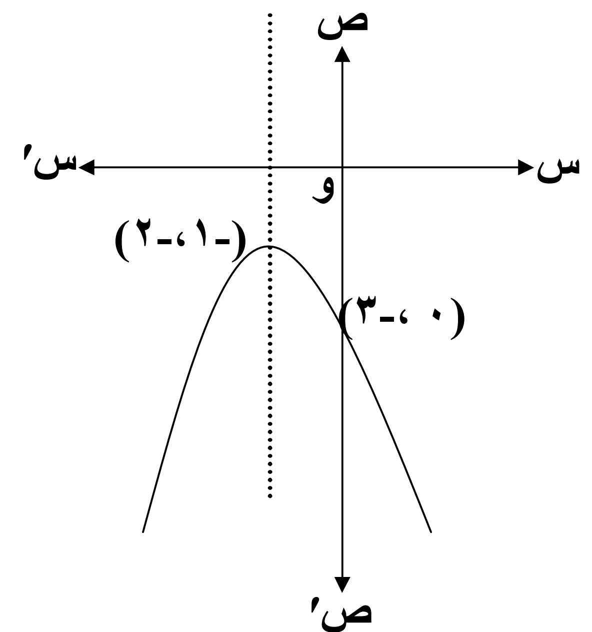
متناقصة فى [١ ، ∞ [

النوع : لا زوجية و لا فردية

لعدم تماثلها حول محور الصادات أو نقطة الاصل

معادلة محور التماثل س = ١

مثال: رُسم منحنى الدالة د(س) = - $س^٢$ ثم أُجريت عليه ازاحات فأخذ المنحنى الصورة الآتية : د(س) = - $(س + ١)^٢$ - ٢ عين هذه الإزاحات واذكر قاعدة الدالة مع ذكر المدى ومعادلة محور التماثل.



(الحل)

إزاحة مقدارها وحدة واحدة فى الاتجاه السالب لمحور السينات متبوعة بإزاحة مقدارها وحدتين فى الاتجاه السالب لمحور الصادات .

قاعدة الدالة هى : د(س) =- $(س+١)^٢$- ٢

مدى الدالة =]- ∞ ،-٢]

معادلة محور التماثل هى : س =-١

مثال: ارسم منحنى الدالة د(س)= $س^٢$+٤س+٦ وابحث اطرادها واذكر مداها ومعادلة محور التماثل ، ثم بين كيف يمكن الحصول على منحنى الدالة من المنحنى د(س) = $س^٢$

(الحل)

يجب اعادة تعريف الدالة الى الصورة القياسية للدالة

د(س) = ($س^٢$+ ٤س +٤) + ٦-٤ = $(س + ٢)^٢$+ ٢

، د متناقصة فى]-∞ ،-٢[، د متزايدة فى [-٢ ، ∞ [

، د ليست زوجية ولافردية

، المدى = [٢ ، ∞ [

، معادلة محور التماثل هى س =-٢

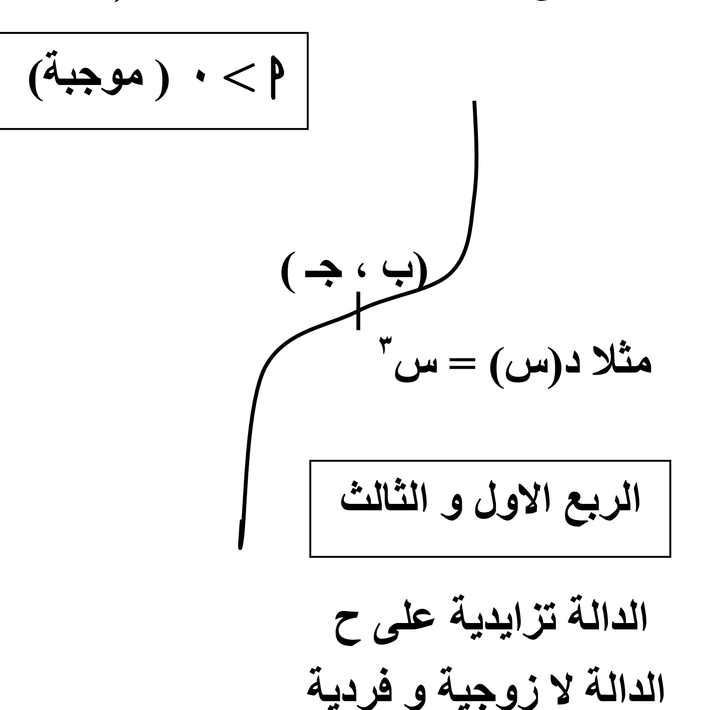
، ويتم الحصول على منحنى الدالة د(س) = $س^٢$+٤ س +٦ من منحنى الدالة د(س) = $س^٢$ وذلك بإزاحة مقدارها وحدتين فى الاتجاه السالب لمحور السينات ، متبوعة بإزاحة مقدارها وحدتين فى الاتجاه الموجب لمحور الصادات

دالة الدرجة الثالثة (الدالة التكعيبية)

الصورة العامة : $د(س) = أ (س - ب)^{٣} + جـ$ ، $أ = \pm ١$

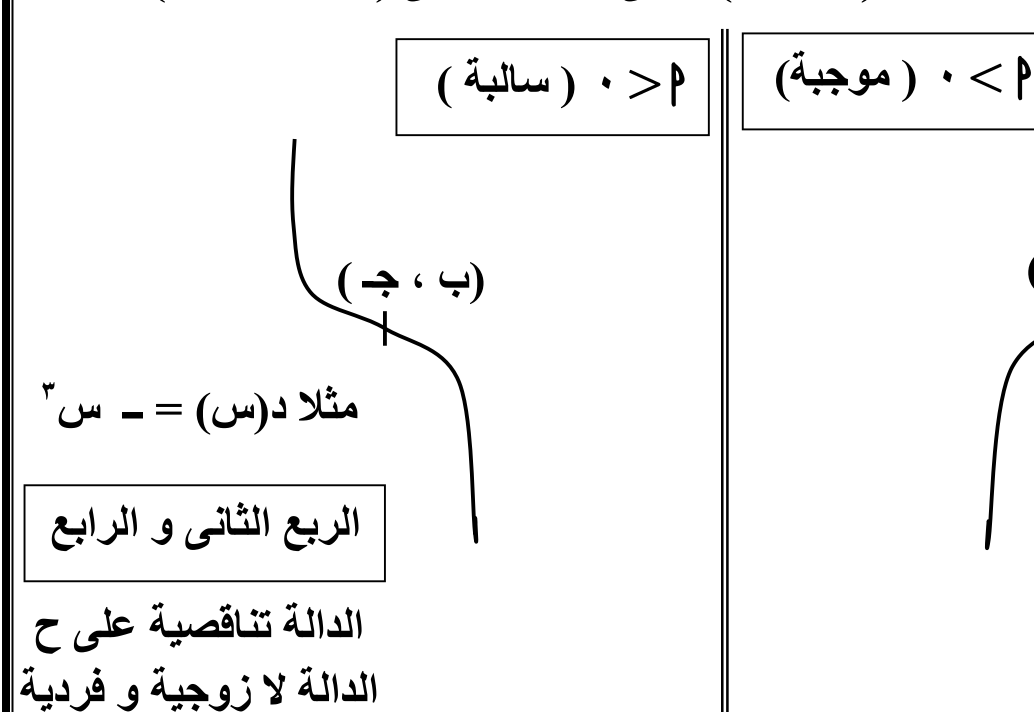
تمثل بيانيا بمنحنى ذو فرعين أحدهما لأعلى و الآخر لأسفل

منحنى الدالة متماثل حول النقطة (ب ، جـ) و هى رأس المنحنى (نقطة التماثل)



الدالة تزايدية على ح

الدالة لا زوجية و فردية



الدالة تناقصية على ح

الدالة لا زوجية و فردية

*** ملاحظات :**

١ـ إذا كانت جـ = صفر فإن نقطة التماثل هى (ب ، ٠)

٢ـ إذا كانت ب = جـ = صفر فإن نقطة التماثل (٠ ، ٠) و تكون الدالة فردية

٣ـ نحصل على منحنى الدالة $د(س) = أ (س – ب) + جـ$ بعد إزاحته أفقيا مقدار | ب | بعكس إشارتها على محور السينات لليمين إذا كانت ب موجبة و لليسار إذا كانت ب سالبة

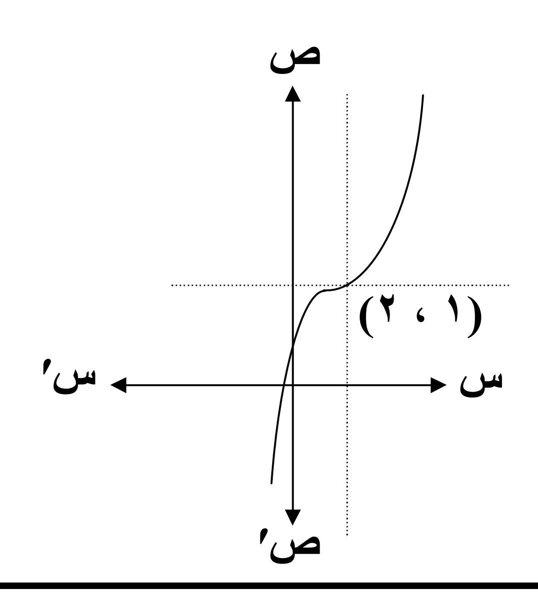
٤ـ وازاحته رأسيا مقدار |جـ | لأعلى إذا كانت جـ موجبة و لأسفل إذا كانت جـ سالبة

٥ـ فى الشكل المقابل :

صورة الدالة التكعيبية بالانعكاس فى محور السينات

- **<u>إزاحة منحنى الدالة فى اتجاه محورى الإحداثيات</u> :**

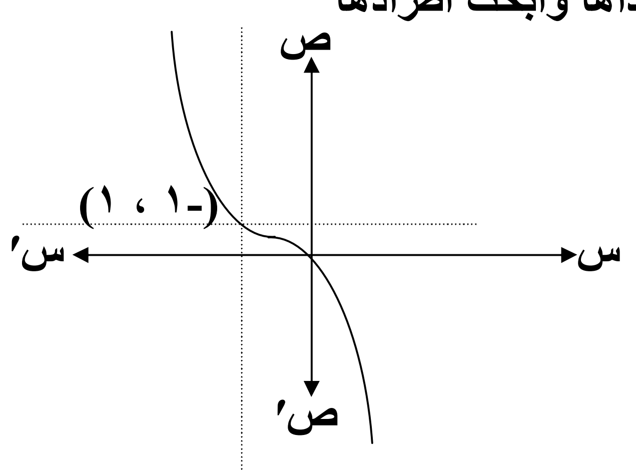
مثال : ارسم د(س) = (س - ١)^{٣} + ٢ اذكر مداها وابحث اطرادها



<u>(الحل)</u>

نقطة التماثل هى (١ ، ٢)
المدى ح
الدالة متزايدة على مجالها ح
الدالة لازوجية ولافردية

مثال: ارسم د(س) = - (س + ١)^{٣} + ١ اذكر مداها وابحث اطرادها

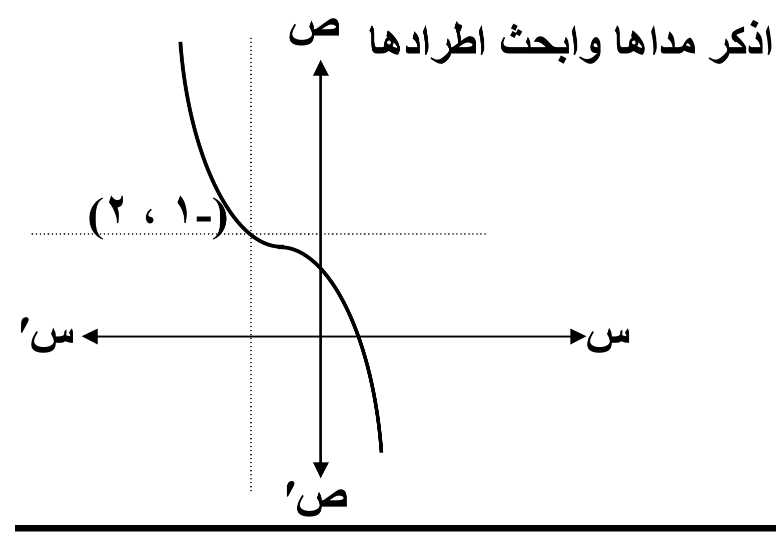


<u>(الحل)</u>

نقطة التماثل هى (-١ ، ١)
المدى= ح
الدالة متناقصة على مجالها ح
الدالة لافردية ولازوجية

مثال : ارسم د(س) = ٢ - (س + ١)^{٣} اذكر مداها وابحث اطرادها

الحل :



نقطة التماثل هى (-١ ، ٢)
المجال = ح ، المدى = ح
الاطراد : تناقصية على مجالها
نوع الدالة : لا زوجية و لا فردية

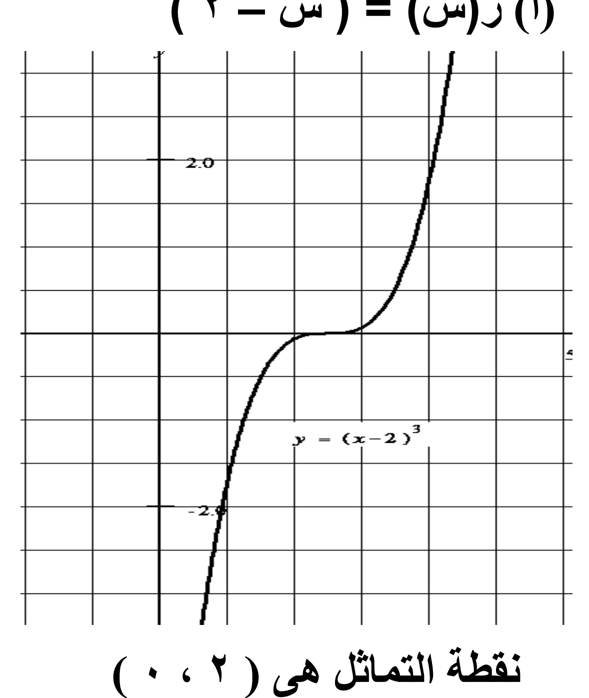
مثال : استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٣} لتمثيل كل من الدوال الآتية
ثم أوجد نقطة التماثل :

(أ) ر(س) = (س ـ ٢)^{٣} (ب) ر(س) = س^{٣} ـ ٣

(حـ) ر(س) = ٤ ـ س^{٣} (د) ر(س) = ١ ـ (س + ٢)^{٣}

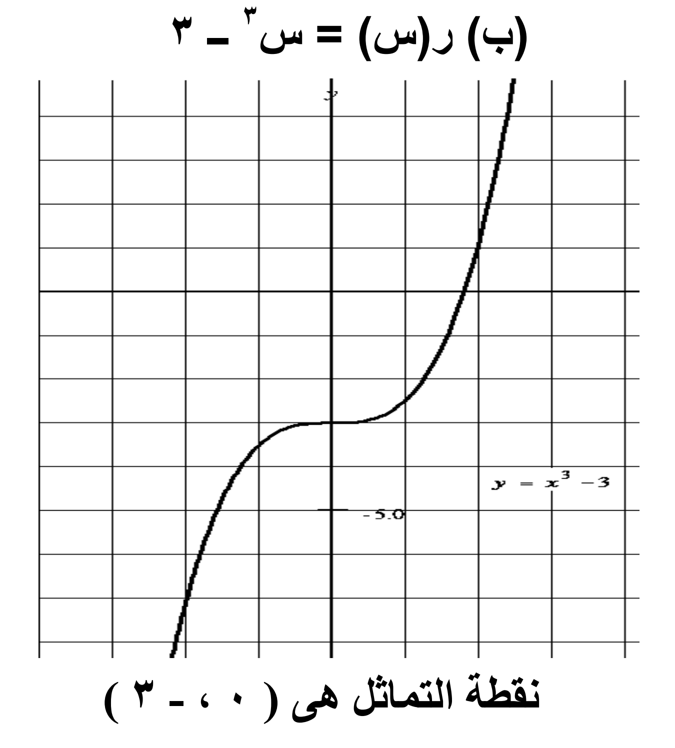
الحل :

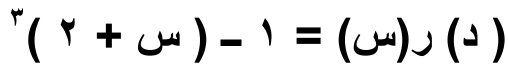
(أ) ر(س) = (س ـ ٢)^{٣}



نقطة التماثل هى (٢ ، ٠)

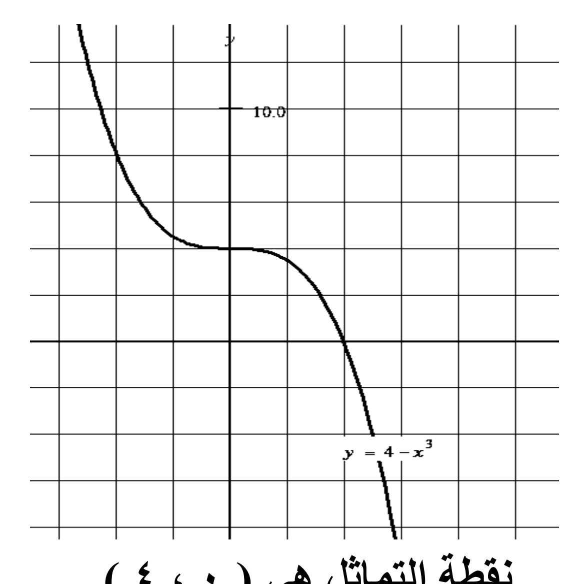
(ب) ر(س) = س^{٣} ـ ٣





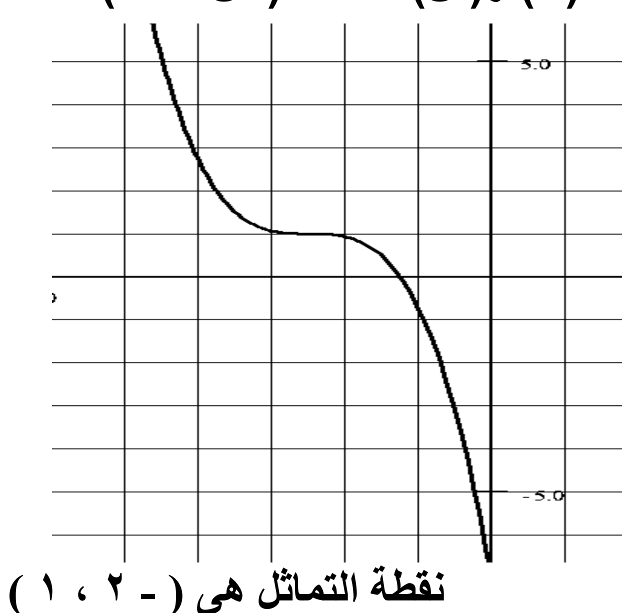
نقطة التماثل هى (٠ ، ـ ٣)

(حـ) ر(س) = ٤ ـ س^{٣}



نقطة التماثل هى (٠ ، ٤)

(د) ر(س) = ١ ـ (س + ٢)^{٣}



نقطة التماثل هى (ـ ٢ ، ١)

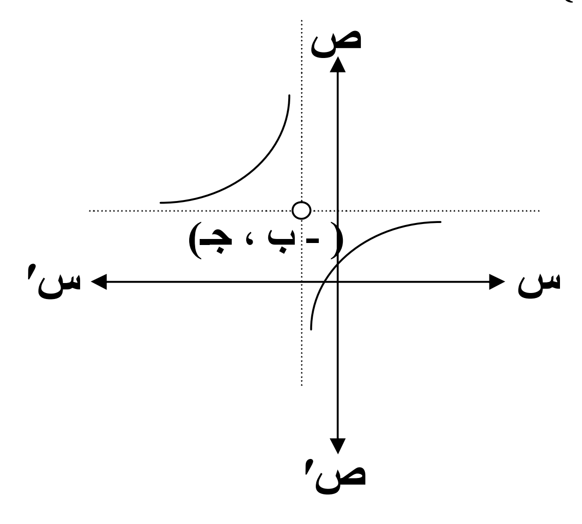
الدالة الكسرية

الصورة العامة : د(س) = $\frac{ك}{س - ب}$ + جـ ، ك ≠ ٠، س ≠ ب

نقطة التماثل هى (ب ، جـ)

ويكون مجالها = ح – { ب } ، مداها = ح – { جـ }

الدالة تناقصية فى] ب ، ∞ [،] - ∞ ، ب[
المنحنى يقع فى الربعين الاول و الثالث
الدالة لا زوجية ولا فردية



الدالة تزايدية فى] - ∞، - ب [،]- ب،∞[
المنحنى يقع فى الربعين الثانى و الرابع
الدالة لا زوجية ولا فردية

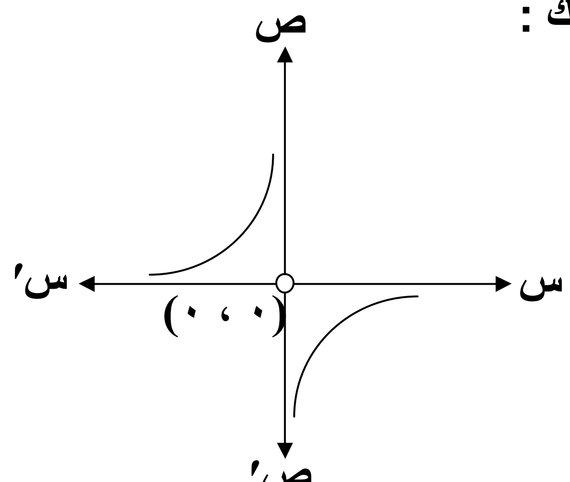
ملحوظة: إذا كانت نقطة التماثل (٠ ، ٠) فأن الدالة فردية

مثال: ارسم منحنى الدالة د(س) = $\frac{١}{س}$ واذكر المجال والمدى وابحث اطرادها واذكر نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

الحل :

المجال = ح – {٠}
المدى = ح – {٠}
د متناقصة فى]- ∞ ،٠[،]٠، ∞ [
د فردية لأنها متماثلة حول نقطة الأصل

مثال: ارسم منحنى الدالة د(س) = $\frac{-1}{س}$ واذكر المجال والمدى وابحث اطرادها واذكر نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :



الحل :

المجال = ح – {٠}

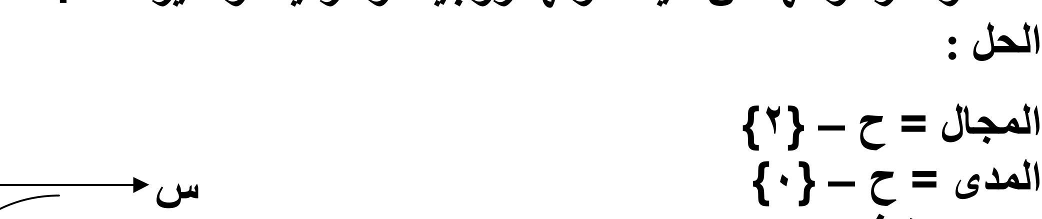
المدى = ح – {٠}

د متزايدة فى]- ∞ ،٠[،]٠، ∞ [

د فردية لأنها متماثلة حول نقطة الأصل

*** التحويلات الهندسية للدالة الكسرية : (فى اتجاهى محورى الاحداثيات)**

مثال: ارسم منحنى الدالة د(س) = $\frac{-1}{س - 2}$ واذكر المجال والمدى وابحث اطرادها واذكر نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :



الحل :

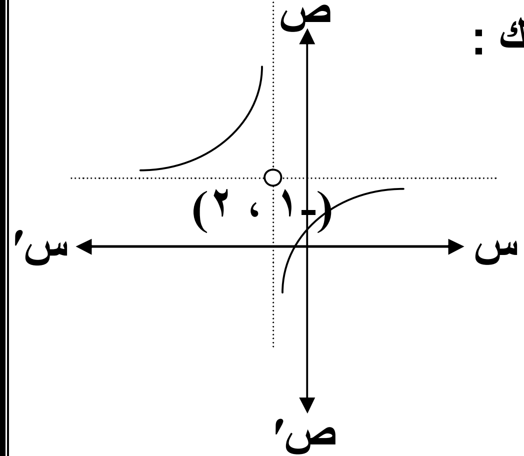
المجال = ح – {٢}

المدى = ح – {٠}

د متزايدة فى]- ∞ ،٢[،] ٢ ، ∞ [

د لافردية ولازوجية

مثال: ارسم منحنى الدالة د(س) = - $\frac{1}{س + 1}$ +٢ واذكر المجال والمدى وابحث اطرادها واذكر نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :



الحل :

المجال = ح – {-١}

المدى = ح – {٢}

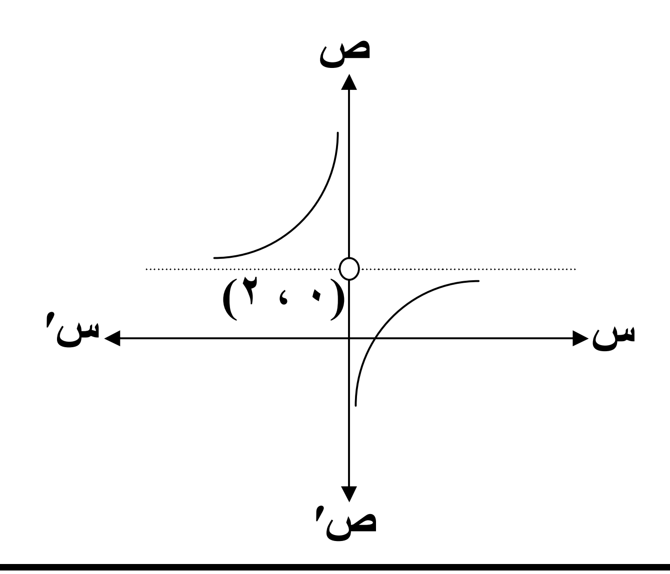
د متزايدة فى]- ∞ ،-١[،] -١، ∞ [

د لافردية ولازوجية

مثال: ارسم منحنى الدالة د(س) = $\frac{٢ س - ١}{س}$ واذكر المجال والمدى وابحث اطرادها

واذكر نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

الحل :



د(س) = $\frac{٢ س}{س}$ - $\frac{١}{س}$ = ٢ - $\frac{١}{س}$

المجال = ح – {٠}

المدى = ح – {٢}

د متزايدة فى]- ∞ ، ٠[،] ٠ ، ∞ [

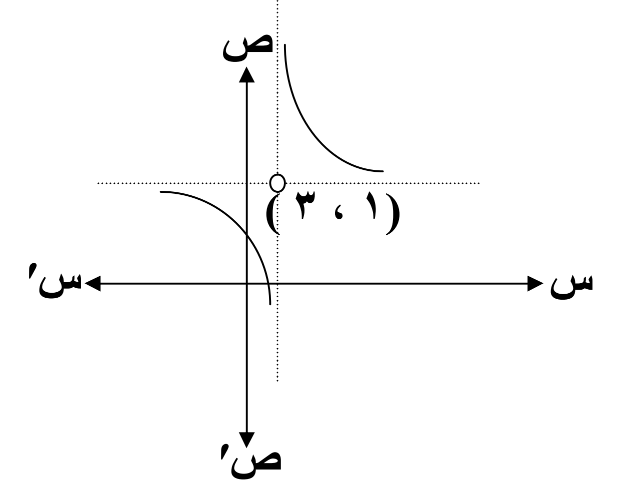
د لافردية ولازوجية

مثال: ارسم منحنى الدالة د(س) = $\frac{٣ س - ٢}{س - ١}$ واذكر المجال والمدى وابحث اطرادها

واذكر نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

الحل :

د(س) = $\frac{٣ س – ٣ – ٢ + ٣}{س - ١}$ = $\frac{٣(س – ١) + ١}{(س – ١)}$ = ٣ + $\frac{١}{س - ١}$



المجال = ح – {١}

المدى = ح – {٣}

د متناقصة فى]- ∞ ، ١[،] ١ ، ∞ [

د لافردية ولازوجية

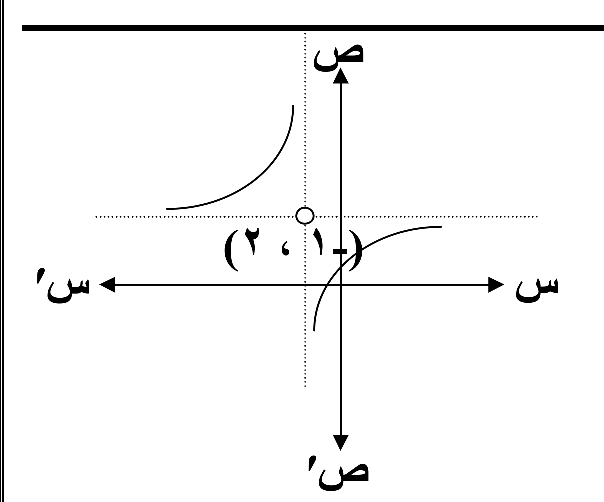
مثال : ارسم منحنى الدالة د(س) = $\frac{٢ س - ١}{س + ١}$ واذكر المجال والمدى وابحث اطرادها

واذكر نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

الحل :

د(س) = $\frac{٢ س +٢ – ١-٢}{س + ١}$ = $\frac{٢ (س +١) – ٣}{س + ١}$ = ٢ – $\frac{٣}{س + ١}$

نقطة التماثل (-١ ، ٢)
المجال = ح – { -١ }
المدى = ح – { ٢ }
الدالة متزايدة فى] - ∞ ، -١ [،] – ١ ، ∞ [
الدالة لا فردية و لا زوجية



مثال : استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س}$ حيث س ≠ ٠ لتمثيل :

(أ) د(س) = $\frac{١}{س + ٣}$ **(ب) د(س) = $\frac{١}{س - ١}$ + ٣**

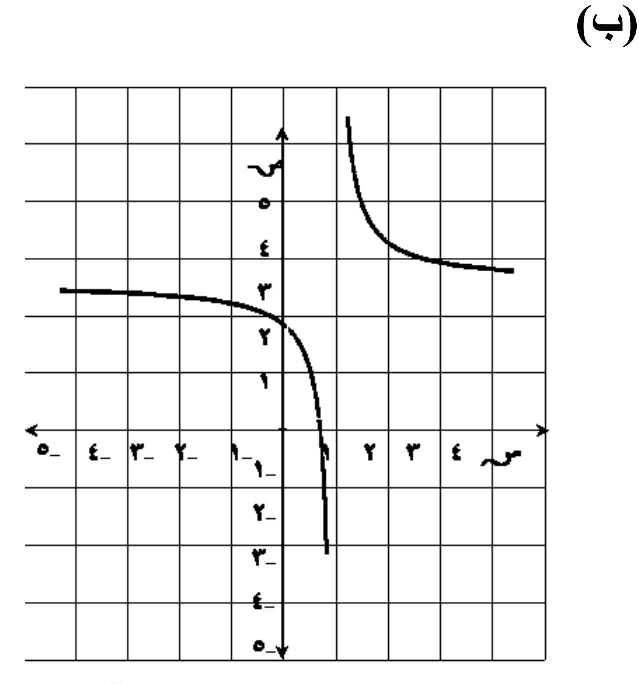
الحل :

(أ)

منحنى الدالة $د_٣$ هو منحنى د (س) = $\frac{١}{س}$ بإزاحة قدرها ٣ وحدات في الاتجاه السالب لمحور السينات.

نقطة التماثل للدالة $د_٣$ هى: (- ٣ ، ٠).

(ب)



منحنى الدالة $د_٤$ هو منحنى د (س) = $\frac{١}{س}$ بإزاحة قدرها وحدة واحدة في الاتجاه الموجب لمحور السينات، ثم إزاحة قدرها ٣ وحدات في الاتجاه الموجب لمحور الصادات.

نقطة التماثل للدالة $د_٤$ هى: (١ ، ٣).

تمارين على رسم المنحنيات

تدريب على الدالة الثابتة و الخطية

مثل بيانيا كلا من الدوال المعرفة بالقواعد الاتية و من الرسم أوجد مجال و مدى كل دالة و ابحث اطرادها و نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك .

[١] د(س) = س

[٢] د(س) = ٢ س + ٣

[٣] د(س) = $\frac{\text{٣ س}^{٢} - ٣}{\text{س}^{٢} - ١}$

[٤] د(س) = $\frac{\text{س}^{٣} - \text{س}}{\text{س}^{٢} - \text{س}}$

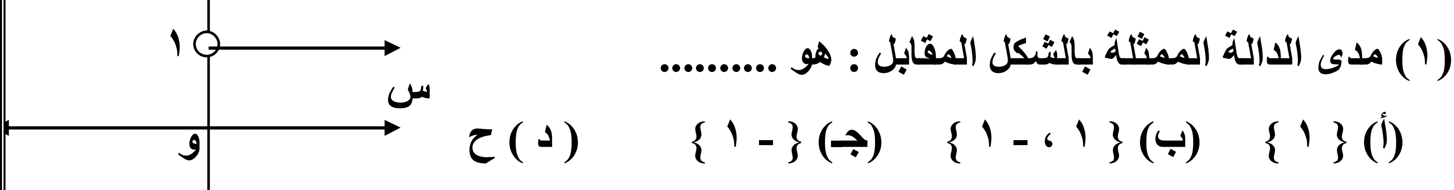
[٥] د(س) = { ٢ ، س ⩾ ٠
　　　　　　{ ـ ٢ ، س < ٠

[٦] د(س) = { س ، س ⩾ ٠
　　　　　　{ ـ س ، س < ٠

[٧] د(س) = { ٣ س ، س ∈ [٠ ، ٢]
　　　　　　{ ٦ ، س ∈] ٢ ، ٤ [
　　　　　　{ س + ٢ ، س ∈ [٤ ، ٦]

[٨] د(س) = { س + ١ ، س > ١
　　　　　　{ ٢ ، ١ > س > ٣
　　　　　　{ س ، س ⩽ ٠

مثال : اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :



(١) مدى الدالة الممثلة بالشكل المقابل : هو ....

(أ) { ١ }　　(ب) { ١ ، ـ ١ }　　(جـ) { ـ ١ }　　(د) ح

(٢) الدالة د : د(س) = ٣ ـ س تكون ....

(أ) تزايدية على ح　　(ب) تناقصية على ح

(جـ) تزايدية فى] ٣ ، ∞ [　　(د) تناقصية فى] ٣ ، ∞ [

* تدريب على دالة المقياس :

[١] مثل بيانيا كلا من الدوال المعرفة بالقواعد الاتية و من الرسم أوجد مجال و مدى كل دالة و ابحث اطرادها و نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك .
و اذكر معادلة محور التماثل إن وجد .

(١) د(س) = | س | + ٤ (٢) د(س) = | س – ٣ |

(٣) ر(س) = | س | + س (٤) ر(س) = | ٢ س + ٣ | + ٣ س – ١

(٥) د(س) = | س + ٣ | (٦) د(س) = | س – ٢ | + ٣

(٧) د(س) = ١ ـ | س – ٢ | (٨) د(س) = | ٤ س – ٢ س | ـ ٣

(٩) د(س) = س ـ | س ـ ٣ | (١٠) د(س) = ٢ ـ | س |

[٢] استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = | س | لتمثيل كل من الدالتين ر ، ع :

(أ) ر(س) = | س + ٤ | (ب) ع(س) = | س – ٢ |

(حـ) ر(س) = | س | - ٥ (ى) ع(س) = | س | + ٦

(هـ) ر(س) = | س + ٣ | - ١ (و) ع(س) = | س – ٢ | + ٤

* تدريب على الدالة التربيعية :

[١] استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = $س^{٢}$ لتمثيل كل من الدالتين ر ، ع حيث :
(أ) ر(س) = $(س + ٢)^{٢}$ ـ ٤ (ب) ع(س) = ٢ ـ $(س ـ ٣)^{٢}$

و من الرسم عين إحداثى نقطة رأس المنحنى و إحداثيات نقط تقاطع المنحنى مع محورى الإحداثيات ، و ابحث إطراد كل من الدالتين .

[٢] استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = $س^{٢}$ لتمثيل كل من الدالتين ر ، ع حيث :
(أ) ر(س) = $س^{٢}$ + ١ (ب) ع(س) = ـ $س^{٢}$ ـ ٢

ومن الرسم عين نقطة رأس المنحنى و عين مدى الدالة .

[٣] ارسم منحنى الدالة د(س) = $س^٢$ ـ ٦ س + ٩ ثم أوجد من الرسم رأس المنحنى ، المدى ، الاطراد نوع الدالة ، معادلة محور التماثل

[٤] ارسم كل من الدوال الآتية ثم عين المدى و الاطراد و النوع و معادلة محور التماثل .

(١) د(س) = $س^٢$ ـ ١ (٢) د(س) = ١ ـ $س^٢$ (٣) د(س) = $(س ـ ١)^٢$

(٤) د(س) = $(س – ٢)^٢$ (٥) د(س) = $(س – ٢)^٢$ + ١

(٦) د(س) = ـ $(س ـ ١)^٢$ (٧) د(س) = ١ ـ $(س – ١)^٢$

(٨) د(س) = $س^٢$ + ١ (٩) د(س) = ـ ٤ ـ $(س – ١)^٢$

(١٠) د(س) = $س^٢$ حيث د : [- ١ ، ٣] ⟵ ح

(١١) د(س) = $(س + ٢)^٢$ ـ ٢ (١٢) د(س) = $س^٢$ ـ ٤ س + ٤

(١٣) د(س) = $س^٢$ ـ ٤ س + ١ (١٤) د(س) = س | س |

(١٥) إذا كانت د: [- ٤ ، ٤] ⟵ ح حيث

$$د(س) = \begin{cases} س^٢ + ١ & \text{عندما } -٤ \leqslant س < ٠ \\ -س^٢ - ١ & \text{عندما } ٠ \leqslant س \leqslant ٤ \end{cases}$$

ارسم منحنى الدالة د، وأوجد مداها، وابحث إطرادها، وعيِّن نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

تدريب على الدالة التكعيبية :

[١] ارسم الشكل البيانى لما يأتي، ومن الرسم أوجد المدى، وابحث الإطراد، وعين نوع الدالة من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

(أ) $$د_١(س) = \begin{cases} س^٣ & \text{عندما } س < -١ \\ -١ & \text{عندما } س \geqslant -١ \end{cases}$$

(ب) $$د_٢(س) = \begin{cases} س^٣ & \text{عندما } س < ٠ \\ |س| & \text{عندما } س \geqslant ٠ \end{cases}$$

(ج) $د_٣(س) = |س^٣| + ١$　　(هـ) $د_٥(س) = س\ |س|$

(د) $د_٤(س) = |س^٣ + ١|$　　(و) $د_٦(س) = \frac{س^٤}{|س|} - ١$

---

[٢] إذا كانت الدالة د حيث $د(س) = س^٣$. استخدم الشكل البيانى للدالة د لتمثيل ما يأتي بيانيا:

(أ) $ق_١(س) = |د(س)| - ٢$　　(ب) $ق_٢(س) = ٣ - |د(س)|$　　(ج) $ق_٣(س) = |د(س - ٤)|$

(د) $ق_٤(س) = |د(س + ١)|$　　(هـ) $ق_٥(س) = |د(س - ٢)| + ٣$　　(و) $ق_٦(س) = ٢ - |د(س + ٢)$

---

[٣] استخدم منحنى الدالة د حيث $د(س) = س^٣$ لتمثيل كل دالة من الدالتين ر ، ع حيث:

(أ) $ر(س) = (س + \frac{٣}{٢})^٣$　　(ب) $ع(س) = ٤ - س^٣$

تدريب على الدالة الكسرية:

[١] مثل كلا من الدوال المعرفة بالقواعد الاتية و من الرسم أوجد مجال و مدى كل دالة و ابحث اطرادها و نوعها من حيث كونها فردية أو زوجية أو غير ذلك :

١) $د(س) = \frac{٢}{س}$　　(٢) $د(س) = \frac{-٢}{س}$　　(٣) $د(س) = \frac{١}{س} + ٣$

٤) $د(س) = \frac{١}{س + ٣}$　　(٥) $د(س) = \frac{١}{س - ٣}$　　(٦) $د(س) = \frac{٢س + ٤}{س - ٣}$

٧) $د(س) = \frac{١}{|س + ٣|}$　　(٨) $د(س) = \frac{(س - ٢)^٢}{|(س - ٢)^٣|}$　　(٩) $د(س) = \frac{٣س - ١}{س}$

---

[٢] إذا كانت الدالة د حيث $د(س) = \frac{١}{س}$ فارسم الشكل البيانى للدالة ق فى الحالات الآتية، ثم أوجد إحداثيي نقطة التماثل لكل دالة:

(أ) $ق(س) = د(س + ١)$　　(ب) $ق(س) = د(س - ٣)$　　(ج) $ق(س) = د(س) + ٢$

(د) $ق(س) = د(س) - ٤$　　(هـ) $ق(س) = د(س + ٢) - ٥$　　(و) $ق(س) = د(س - ٢) + ٢$

[٣] إذا كانت الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س}$ فارسم الشكل البيانى للدالة ل فى الحالات الآتية:

(أ) ل(س) = |د(س)| (ب) ل(س) = ٢ + |د(س)|

(جـ) ل(س) = |د(س - ٢)| (د) ل(س) = ٢ - |د(س + ١)|

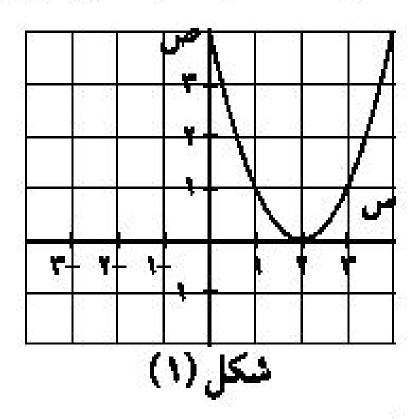
---

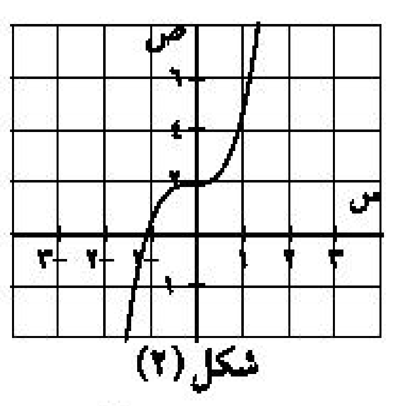
[٤] ارسم الشكل البيانى لما يأتي، ومن الرسم أوجد إحداثيي نقطة التماثل، وابحث إطراد الدالة كذلك نوعها، من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

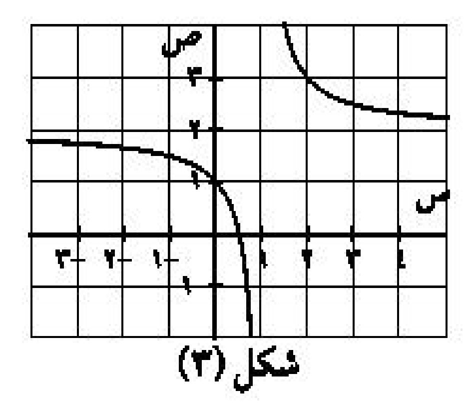
(أ) $د_١(س) = \frac{١}{|س|}$ (ب) $د_٢(س) = \frac{١}{|س - ٣|}$ (جـ) $د_٤(س) = ٢ - \frac{١}{|س|}$

(د) $د_٥(س) = \frac{١}{|س + ١|} - ٢$ (هـ) $د_٦(س) = \frac{١}{|س - ٢|} + ٣$

أجريت بعض التحويلات الهندسية للدوال د ، ر ، ع حيث د(س) = $س^٢$ ، ر(س) = $س^٣$ ، ع(س) = $\frac{١}{س}$ فكانت كما فى الأشكال الآتية على الترتيب أكمل ما يأتى:


شكل (١)


شكل (٢)


شكل (٣)

(أ) قاعدة الدالة فى شكل (١) هى ....
(ب) قاعدة الدالة فى شكل (٢) هى ....
(جـ) قاعدة الدالة فى شكل (٣) هى ....
(د) الدالة ليست آحادية كما فى شكل ....
(هـ) مدى الدالة في شكل (١) هو ....
(و) مدى الدالة هو ح كما فى شكل ....
(ز) نقطة تماثل الدالة فى شكل (٣) هى ....
(ح) معادلة محور تماثل الدالة فى شكل (١) هى ....

حل المعادلات و المتباينات

أولا : حل المعــادلات :

* **تذكر أن :**

(**مفهوم المقياس**) ⇦ هو عدد حقيقى غير سالب ($\geq$ ٠)

(**مقياس العــدد**) ⇦ هو الجذر التربيعى الموجب لمربع هذا العدد .

مثلا : | - ٥ | = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ ، | ٣ | = $\sqrt{٩}$ = ٣ ، | ٠ | = ٠ ، | $\frac{١}{٢}$ | = $\frac{١}{٢}$

* **تعريف " فك " المقياس :**

$$|س| = \begin{cases} س & ، س \geq ٠ \\ -س & ، س < ٠ \end{cases}$$

$$|س - ٢| = \begin{cases} س - ٢ & ، س \geq ٢ \\ -س + ٢ & ، س < ٢ \end{cases}$$

$$|٢س + ٦| = \begin{cases} ٢س + ٦ & ، س \geq -٣ \\ -٢س - ٦ & ، س < -٣ \end{cases}$$

* حل معادلات المقياس بيانيا :

الحل البيانى للمعادلة $د_١(س) = د_٢(س)$ هو مجموعة قيم س لنقاط تقاطع منحنيى الدالتين

الطريقة العامة للحل :

١) نجعل المقياس فى طرف لوحده

٢) نرسم الطرف الأيمن من المعادلة كدالة منفصلة و لتكن د(س) [بدقة متناهية]

٣) نرسم الطرف الأيسر من المعادلة كدالة منفصلة و لتكن ر(س) [بدقة متناهية]

٤) نحسب الإحداثيات السينية لنقط تقاطع الدالتين د ، ر ، و نكتب مجموعة الحل هى قيم س

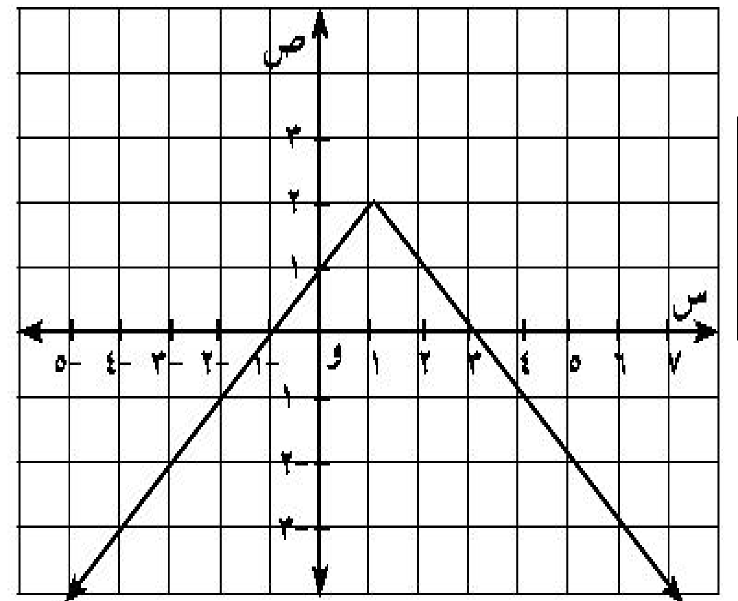
طرق حل معادلات المقياس:

- الحل البياني.
- الحل الجبري (إعادة تعريف دالة المقياس - أو تربيع طرفي المعادلة).

مثال : ارسم الدالة د(س) =
٣ ـ س　عندما س > ١
١ + س　عندما س ⩽ ١

ثم أوجد قيم س التى تجعل د(س) = ٠

الحل :



	س > ١			س ⩽ ١		
س	٤	٣	٢	١	٠	ـ ١
د(س)	ـ ١	٠	١	٢	١	٠

د(س) = ٠ عند　س = ٣　، س = ـ ١
م . ح = { ٣ ، ـ ١ }

<u>التحقق الجبرى</u> :

حيث د(س) = ٠
عندما س > ١　فإن ٣ ـ س = ٠　∴ س = ٣ ∋] ١ ، ∞ [تحقق الفترة المعطاة
عندما س ⩽ ١　فإن ١ + س = ٠　∴ س = ـ ١ ∋] - ∞ ، - ١] تحقق الفترة المعطاة
مجموعة حل المعادلة د(س) = ٠ هى { ٣ ، ـ ١ }

---

[١] <u>حل المعادلة على الصورة | أس ـ ب | = حـ</u> :

مثال : حل المعادلة | س ــ ٣ | = ٥ بيانياً وحقق الناتج جبرياً
<u>الحل البيانى</u> : نضع المعادلة على الصورة : | س ــ ٣ | - ٥ = ٠
نفرض أن د(س) = | س ــ ٣ | - ٥

= { س ــ ٣ ــ ٥　،　س ≤ ٣
**　 { - س + ٣ - ٥　،　س > ٣**

د(س) = { س ــ ٨　،　س ≤ ٣
**　　　 { - س ـ ٢　،　س > ٣**

ص
س′　ـ ٢　٠　٣　٨　س
(٣ ، -٥)
ص′

من الرسم المنحنى يقطع محور السينات فى (٨ ، ٠) ، (- ٢ ، ٠)

م . ح = { ٨ ، - ٢ }

الحل الجبرى :

عندما س ≥ ٣　　فإن س - ٨ = ٠　　∴ س = ٨ ∈ [٣ ، ∞ [

عندما س < ٣　　فإن – س – ٢ = ٠　　∴ س = - ٢ ∈] - ∞ ، ٣ [

∴ مجموعة الحل = { ٨ ، - ٢ }

حل أخر : نرسم : د(س) = | س – ٣ | ، ر(س) = ٥

منحنى الدالة ر(س) يقطع منحنى الدالة د(س) فى النقاط (٨ ، ٥) ، (- ٢ ، ٥)

م . ح = { ٨ ، - ٢ }

الحل الجبرى :

| س – ٣ | = ٥

∴ س – ٣ = ± ٥

∴ س – ٣ = ٥　　|　　س – ٣ = - ٥

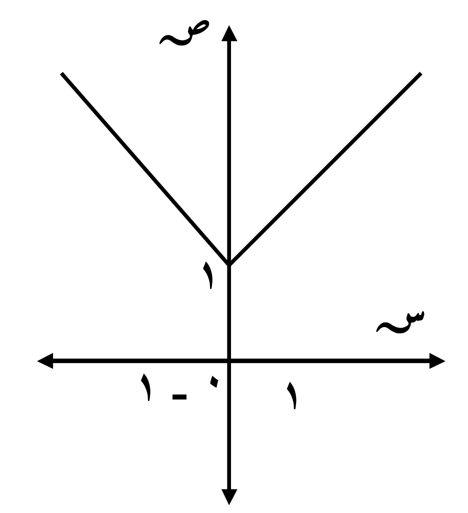
س = ٨ تحقق　　|　　س = - ٢ تحقق

∴ م . ح = { ٨ ، - ٢ }

مثال : حل المعادلة | س | + ١ = ٠ بيانيا و جبريا

الحل البيانى :

نرسم د(س) = |س| + ١ = { س + ١ عندما س ⩾ ٠ ، - س + ١ عندما س < ٠ }



منحنى الدالة لا يقطع محور السينات ∴ م . ح = Ø

الحل الجبرى :

عندما س ⩾ ٠ فإن س + ١ = ٠ ∴ س = - ١ ∉ [٠ ، ∞ [

عندما س < ٠ فإن – س + ١ = ٠ ∴ س = ١ ∉] - ∞ ، ٠ [

- ١ ، ١ لا يحقق المعادلة ∴ م . ح = Ø

حل جبرى آخر : ∵ |س| + ١ = ٠ ∴ |س| = - ١ مرفوض لان |س| ⩾ ٠

∴ م . ح = Ø

[٢] حل المعادلة على الصورة | ٩س + ب | = جـ س + ء :

مثال : حل المعادلة | ٢ س – ٣ | = س + ٣ بيانيا و جبريا

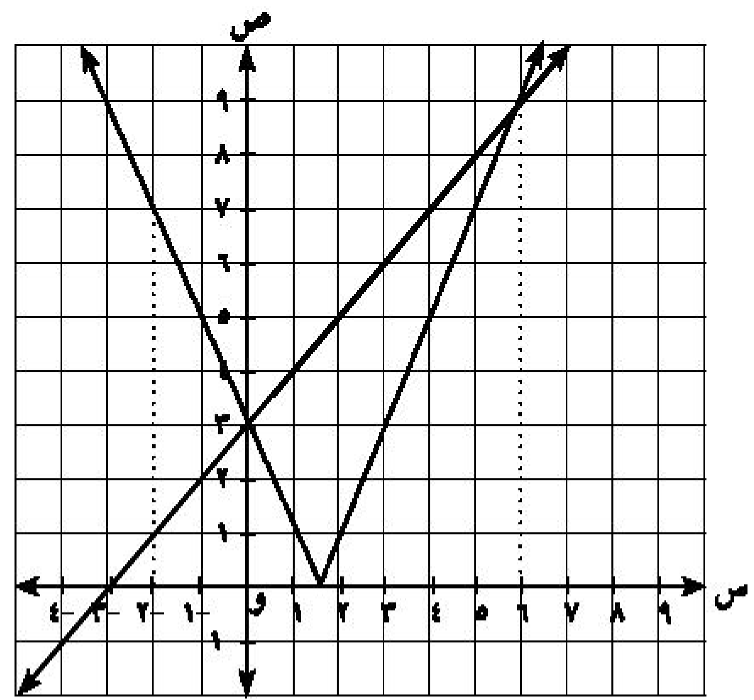
الحل البيانى : نرسم الدالتين د(س) = | ٢ س – ٣ |

، ر(س) = س + ٣

و من الرسم نجد نقط تقاطع منحنيى الدالتين

(٠ ، ٣) ، (٦ ، ٩)

∴ مجموعة الحل = { ٠ ، ٦ }





الحل الجبرى :

عندما س ⩾ ١.٥

فإن ٢ س – ٣ = س + ٣

∴ س = ٦ ∈ [١.٥ ، ∞ [تحقق

عندما س < ١.٥

فإن – ٢ س + ٣ = س + ٣

∴ – ٣ س = ٠

∴ س = ٠ ∈] - ∞ ، ١.٥ [تحقق

∴ مجموعة الحل = { ٠ ، ٦ }

مثال : حل المعادلة | ٢ س + ٥ | = س – ٤ بيانيا و جبريا

الحل البيانى : نرسم الدالتين د(س) = | ٢ س + ٥ | ، ر(س) = س – ٤

نلاحظ انه لا يوجد نقط تقاطع للمنحنيين

∴ مجموعة الحل = Ø

الحل الجبرى :

عندما س ⩾ – ٢.٥ ∴ ٢ س + ٥ = س – ٤

∴ س = - ٩ ∉ [- ٢.٥ ، ∞ [لا تحقق

عندما س < - ٢.٥ ∴ – ٢ س – ٥ = س – ٤

∴ – ٣ س = ١ ∴ س = - $\frac{١}{٣}$ ∉] - ∞ ، - ٢.٥ [لا تحقق

∴ مجموعة الحل = Ø

[٣] حل المعادلة على الصورة | ٢س + ب | = | جـ س + ء | :

مثال : حل المعادلة | س – ٢ | = | س + ٣ | بيانياً وحقق الناتج جبرياً

الحل البيانى:

نرسم $د_1$ = | س – ٢ |

، $د_2$ = | س + ٣ |

نجد أن نقطة التقاطع هى (-٠.٥ ، ٢.٥)

ص ، $د_2$ ، $د_1$ ، ٢.٥ ، س ، َس ، (٢ ، ٠) (-٠.٥ ، ٠) (-٣ ، ٠) ، َص

الحل الجبرى :

بتربيع الطرفين : $(|$ س – ٢ $|)^2 = (|$ س + ٣ $|)^2$

$($ س – ٢ $)^2 = ($ س + ٣ $)^2$

∴ $س^2$ - ٤ س + ٤ = $س^2$ + ٦س + ٩

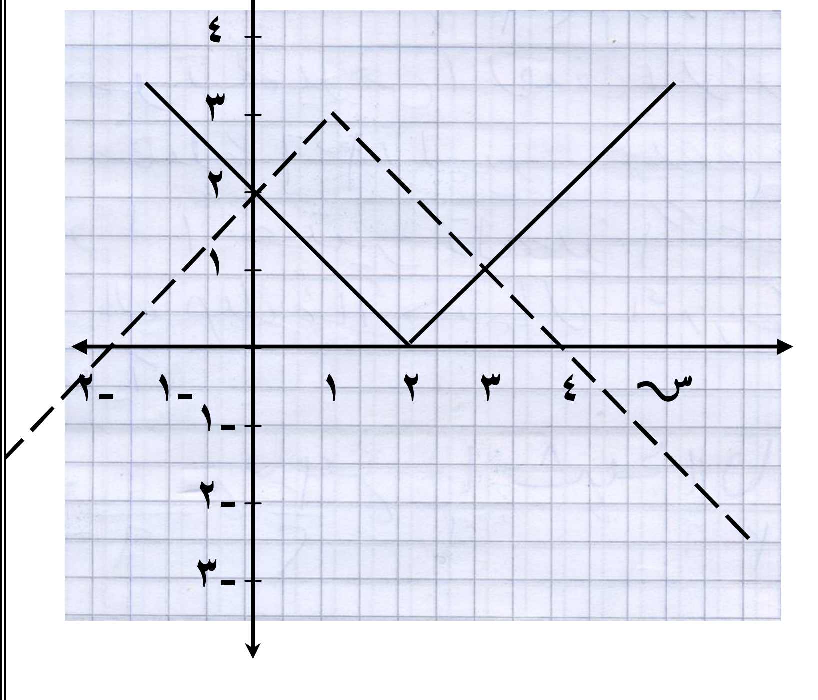
∴ - ١٠ س = ٥

∴ س = $\frac{-٥}{١٠} = \frac{-١}{٢}$　　　∴ مجموعة الحل = { $\frac{-١}{٢}$ }

مثال : حل المعادلة | س – ٢ | + | س – ١ | = ٣ بيانيا وجبريا

الحل البيانى : باعادة التعريف للمعادلة | س – ٢ | = - | س – ١ | + ٣

نرسم الدالتين د(س) = | س – ٢ |　، ر(س) = - | س – ١ | + ٣



من الرسم نقط تقاطع المنحنين

هى (٣ ، ١) ، (٠ ، ٢)

∴ مجموعة الحل = { ٠ ، ٣ }

الحل الجبرى : باعادة التعريف للمعادلة

	٢	١
س – ٢	ـ س + ٢	ـ س + ٢
س – ١	س – ١	ـ س + ١
٣ـ	٣ـ	٣ـ
س = ٣	٢ـ	س = ٠
	مرفوض	

م . ح = { ٠ ، ٣ }

مثال : أوجد مجموعة حل المعادلة | س ـ ٢ | + | س | = ١ بيانيا

الحل :

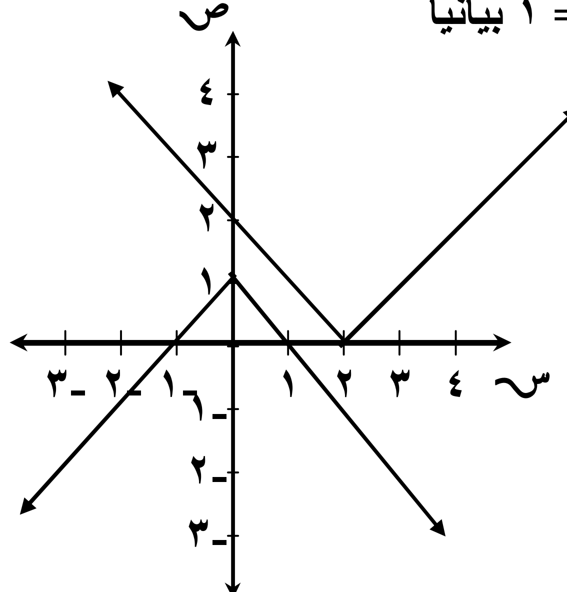
نضع المعادلة على الصورة :

| س ـ ٢ | = ١ ـ | س |

نرسم الدالتين $د_1$(س) = | س – ٢ |

، $د_2$(س) = ١ ـ | س |

من الرسم : مجموعة الحل = $\emptyset$



مثال : حل المعادلة | س – ٢ | + | س | = ٤ بيانيا

الحل :

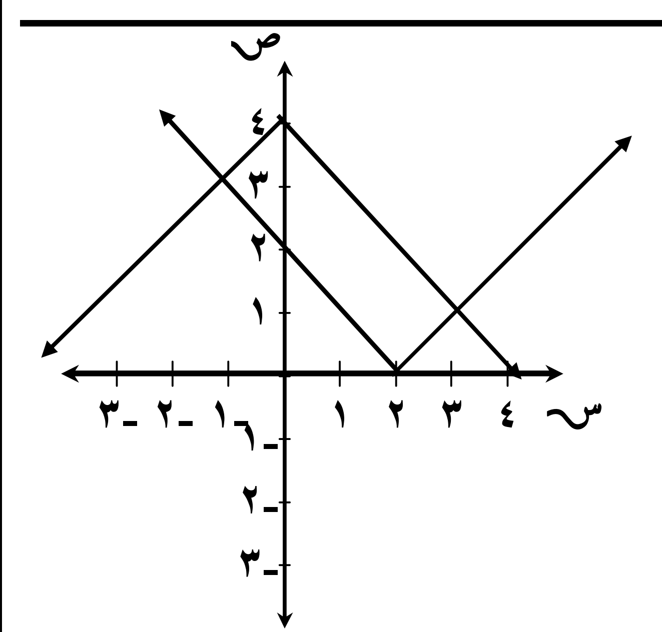
نضع المعادلة على الصورة :

| س ـ ٢ | = ٤ ـ | س |

نرسم الدالتين $د_1$(س) = | س – ٢ |

، $د_2$(س) = ٤ ـ | س |

من الرسم : مجموعة الحل = { ـ ١ ، ٣ }



مثال : أوجد مجموعة الحل للمعادلة بيانيا | س + ٢ | + | س | = ٢

الحل :

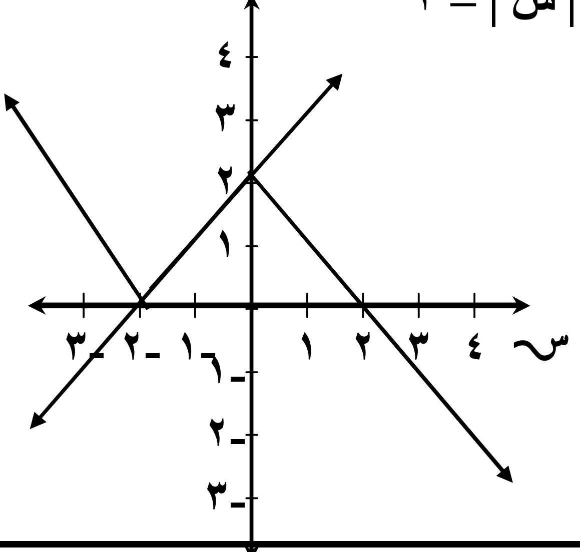
نضع المعادلة على الصورة

| س + ٢ | = ٢ ـ | س |

نرسم $د_1$(س) = | س + ٢ | ، $د_2$(س) = ٢ ـ | س |

نوجد نقط تقاطع الشكلين البيانيين فنجد :

م . ح = [ـ ٢ ، ٠]



* حل المعـــادلات جبريا *

* خواص مقياس العدد :

(١) | س | ⩾ ٠ ، | س | = ٠ إذا كان س = ٠

(٢) مقياس العدد = مقياس معكوسه الجمعي
مثلا : | ؟ | = | - ؟ | ، | ٣ | = | - ٣ | ، | س - ٢ | = | - (٢ - س) | = | ٢ - س |
| س - ٥ | = | ٥ - س |

(٣) | س + ص | ⩽ | س | + | ص | مثلا | س + ٤ | ⩽ | س | + | ٤ |

(٤) مقياس حاصل ضرب عددين = حاصل ضرب مقياسيهما | س ص | = | س | × | ص |
مثلا : | - ٣ س | = | - ٣ | × | س | = ٣ | س |
| - ٢ (س - ٥) | = | - ٢ | × | س - ٥ | = ٢ | س - ٥ |
| س + ٢ | | س - ٢ | = | (س + ٢)(س - ٢) | = | $س^٢$ - ٤ |

(٥) مقياس خارج قسمة عددين = خارج قسمة مقياسيهما $\left|\frac{س}{ص}\right| = \frac{|س|}{|ص|}$

مثلا : $\left|\frac{س + ١}{س - ٣}\right| = \frac{|س + ١|}{|س - ٣|}$

(٦) مقياس العدد = الجذر التربيعي الموجب لمربع هذا العدد
مثلا : | ؟ | = $\sqrt{؟^٢}$ ، | ٥ | = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ ، (| ؟ | $)^٢$ = $؟^٢$ ، (| - ٣ | $)^٢$ = ٩

تذكر أن :

صفر المقياس هو قيمة س الناتجة من وضع ما بداخل المقياس مساويا الصفر
مثلا : لإيجاد صفر | ٢ س - ٦ | نضع ٢ س - ٦ = ٠ و منها س = ٣
∴ صفر هذا المقياس هو { ٣ } و هو يفيد فى تحقيق الحل لمعادلة المقياس بسهولة

فكـرة حل معادلات المقياس :

نأخذ ما بداخل المقياس بنفس إشارته عندما س ⩾ (صفر المقياس)
، و نأخذه بعكس إشارته عندما س < (صفر المقياس)

مثال : أوجد مجموعة الحل للمعادلة | ٢ س ـ ٧ | = ٣

الحل :

صفر المقياس : بوضع ٢ س ـ ٧ = ٠ ⟸ ٢ س = ٧ ⟸ س = $\frac{٧}{٢}$ = ٣.٥

عندما س ⩽ ٣.٥	عندما س < ٣.٥
٢ س ـ ٧ = ٣ ⟸ ٢ س = ١٠ ⟸ س = ٥ تحقق	- (٢ س ـ ٧) = ٣ ⟸ ـ ٢ س + ٧ = ٣ - ٢ س = - ٤ ⟸ س = ٢ تحقق

م . ح = { ٥ ، ٢ }

مثال : أوجد مجموعة الحل للمعادلة : | ٢ س ـ ٥ | ـ ٣ س = ٢

الحل :

٢ س ـ ٥ = ٠ ⟸ س = $\frac{٥}{٢}$ = ٢.٥

عندما س ⩽ ٢.٥	عندما س < ٢.٥
٢ س ـ ٥ ـ ٣ س = ٢ ⟸ ـ س = ٧ ⟸ س = - ٧ مرفوض	- ٢ س + ٥ ـ ٣ س = ٢ ⟸ ـ ٥ س = - ٣ ⟸ س = $\frac{٣}{٥}$ تحقق

م . ح = { $\frac{٣}{٥}$ }

مثال : أوجد مجموعة الحل للمعادلة : ٥ + | س ـ ٣ | = ٠

الحل :

صفر المقياس : س ـ ٣ = ٠ ⟸ س = ٣

عندما س ⩽ ٣	عندما س < ٣
٥ + س ـ ٣ = ٠ ⟸ س = - ٢ مرفوض	٥ ـ (س ـ ٣) = ٠ ⟸ ٥ ـ س + ٣ = ٠ س = ٨ مرفوض

م . ح = $\varnothing$

<u>حل آخر</u> : بالنظر للمعادلة الأصلية نجد أن : | س ـ ٣ | = - ٥ و هذا مرفوض لان ناتج أى مقياس لابد أن يكون موجبا و بالتالى فلا يوجد حل اذهه المعادلة .

مثال : حل المعادلة : | س | ^{٢} ـ ٣ س | س | = ـ ١٨

الحل :

عندما س ⩾ ٠

س^{٢} ـ ٣ س × س = ـ ١٨

⟸ ـ ٢ س^{٢} = ـ ١٨ ⟸ س^{٢} = ٩

⟸ س = ٣ ، س = ـ ٣ مرفوض

عندما س < ٠

س^{٢} ـ ٣ س × (ـ س) = ـ ١٨

⟸ س^{٢} + ٣ س^{٢} = ـ ١٨

⟸ ٤ س^{٢} = ـ ١٨ ⟸ س^{٢} = $\frac{-١٨}{٤}$ مرفوض

∴ م . ح = { ٣ }

مثال : أوجد مجموعة الحل للمعادلة : $\frac{٧ س + ٤}{٥} = \frac{| ٢ س - ٥ |}{٢}$

الحل :

بالضرب فى ١٠ ينتج أن : ٥ | ٢ س ـ ٥ | = ٢ (٧ س + ٤)

صفر المقياس : ٢ س ـ ٥ = ٠ ⟸ س = $\frac{٥}{٢}$ = ٢.٥

عندما س ⩾ ٢.٥

٥ (٢ س ـ ٥) = ٢ (٧ س + ٤)

⟸ ١٠ س ـ ٢٥ = ١٤ س + ٨

⟸ ـ ٤ س = ٣٣ ⟸ س = ـ ٨.٢٥ مرفوض

عندما س < ٢.٥

ـ ٥ (٢ س ـ ٥) = ٢ (٧ س + ٤)

⟸ ـ ١٠ س + ٢٥ = ١٤ س + ٨

⟸ ـ ٢٤ س = ـ ١٧

⟸ س = $\frac{١٧}{٢٤}$ تحقق

م . ح = { $\frac{١٧}{٢٤}$ }

مثال أوجد مجموعة الحل للمعادلة $\sqrt{س^{٢} + ٢ س + ١}$ = ٥

الحل :

$\sqrt{س^{٢} + ٢ س + ١}$ = $\sqrt{(س + ١)^{٢}}$ = ٥ ⟸ | س + ١ | = ٥

تابع الحل :

عندما س $\geqslant$ ـ ١

س + ١ = ٥ ⟸ س = ٤ تحقق

عندما س < ـ ١

ـ (س + ١) = ٥ ⟸ ـ س ـ ١ = ٥

⟸ ـ س = ٦ ⟸ س = ـ ٦ تحقق

∴ س ∈ { ـ ٦ ، ٤ }

مثال : أوجد مجموعة الحل للمعادلة : $\left|\frac{\text{س} + ٣}{\text{س} + ١}\right| = ٢$

الحل : ∵ $\left|\frac{\text{س} + ٣}{\text{س} + ١}\right| = ٢$ ∴ $\frac{\text{س} + ٣}{\text{س} + ١} = \pm ٢$

$\frac{\text{س} + ٣}{\text{س} + ١} = ٢$

س + ٣ = ٢ (س + ١)

س + ٣ = ٢ س + ٢ ⟸ ـ س = ـ ١

س = ١ تحقق

$\frac{\text{س} + ٣}{\text{س} + ١} = -٢$

س + ٣ = ـ ٢ (س + ١)

س + ٣ = ـ ٢ س ـ ٢ ⟸ ٣ س = ـ ٥

س = $\frac{-٥}{٣}$ تحقق

م . ح = { ١ ، $\frac{-٥}{٣}$ }

<u>حل آخر</u> : $\left|\frac{\text{س} + ٣}{\text{س} + ١}\right| = ٢$ ⟸ $\frac{|\text{س} + ٣|}{|\text{س} + ١|} = ٢$ ⟸ | س + ٣ | = ٢ | س + ١ |

وبتربيع الطرفين : $(\text{س} + ٣)^٢ = ٤ (\text{س} + ١)^٢$

$\text{س}^٢ + ٦\text{ س} + ٩ = ٤ (\text{س}^٢ + ٢\text{ س} + ١)$ ⟸ $\text{س}^٢ + ٦\text{ س} + ٩ = ٤\text{ س}^٢ + ٨\text{ س} + ٤$

$٤\text{ س}^٢ + ٢\text{ س} - ٥ = ٠$ ⟸ (٣ س + ٥)(س ـ ١) = ٠

⟸ ٣ س + ٥ = ٠ أو س ـ ١ = ٠ ⟸ س = $\frac{-٥}{٣}$ تحقق أو س = ١ تحقق

∴ م . ح = { ١ ، $\frac{-٥}{٣}$ }

مثال : حل المعادلة | س + ٥ | ـ | س ـ ٣ | = ٠

الحل : | س + ٥ | = | س ـ ٣ | بتربيع الطرفين (لاحظ أن التربيع يلغى المقياس)

نحل السؤال كما فى الحل الآخر م . ح = { ـ ١ }

مثال : حل المعادلة | س + ١ | | س – ١ | = ٣

الحل :

| (س + ١)(س – ١) | = ٣ ⟸ | س^{٢} – ١ | = ٣ ⟸ س^{٢} – ١ = ± ٣

س^{٢} – ١ = ٣

س^{٢} = ٤ ⟸ س = ± ٢ تحققان

س^{٢} - ١ = - ٣

س^{٢} = - ٢ مرفوض

∴ م . ح = { ٢ ، - ٢ }

مثال : أوجد مجموعة الحل للمعادلة : (س + ١)(| س | - ١) + ٠.٥ = ٠

الحل :

| س | = { س ، س ≥ ٠ ؛ - س ، س < ٠ }

عندما س ≥ ٠

(س + ١)(س – ١) + ٠.٥ = ٠

س^{٢} – ١ + ٠.٥ = ٠

س^{٢} – ٠.٥ = ٠

س^{٢} = ٠.٥ = $\frac{١}{٢}$

س = ± $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

س = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ تحقق

س = $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$ مرفوض

عندما س < ٠

(س + ١)(- س – ١) + ٠.٥ = ٠

- س^{٢} – ١ – ٢ س + ٠.٥ = ٠

- س^{٢} – ٢ س – ٠.٥ = ٠   × - ١

س^{٢} + ٢ س + ٠,٥ = ٠   × ٢

٢ س^{٢} + ٤ س + ١ = ٠

باستخدام القانون العام :

أ = ٢ ، ب = ٤ ، جـ = ١

المميز = ب^{٢} – ٤ أ جـ = ١٦ – ٤ × ٢ × ١ = ٨

س = $\frac{– ب ± \sqrt{ب^{٢} – ٤ أ جـ}}{٢ أ}$ = -١ ± $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

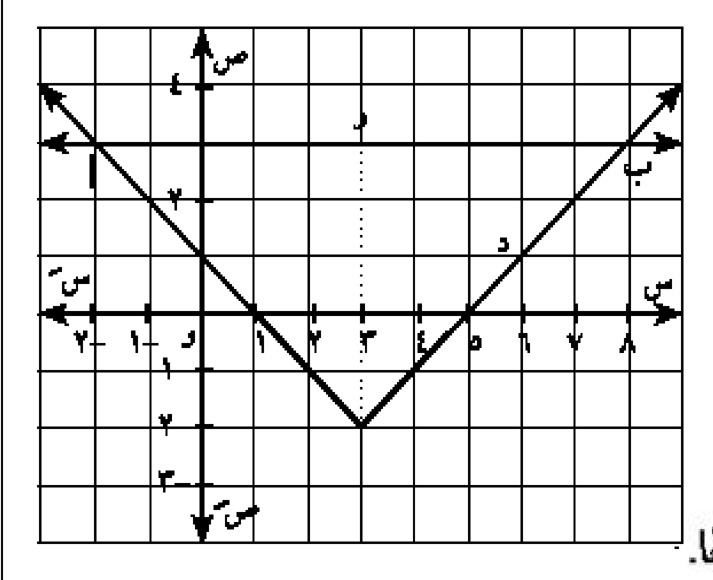
تحققان

م . ح = { $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ، -١ + $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ، -١ - $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ }

تطبيقات حياتية على حل المعادلات

مثال : قطعة أرض محصورة بين منحنيى الدالتين د ، ر حيث د(س) = | س – ٣ | - ٢ ، ر(س) = ٣ احسب مساحتها بالوحدات المربعة وإذا كان طول الوحدة ٨ أمتار إحسب مساحة الأرض بالأمتار المربعة.

الحل :



بتمثيل منحنى الدالتين د ، ر بيانيا نجد انهما يتقاطعان فى النقط ا(- ٢ ، ٣) ، ب(٨ ، ٣) و تكون قطعة الارض على شكل مثلث اب جـ القائم فى جـ حيث اب = ١٠ وحدات ، جـ ى = ٣ ـ (ـ ٢) = ٥ وحدات

∴ مساحة △ ب ا جـ = $\frac{١}{٢}$ ا ب × جـ ى

= $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ٥ = ٢٥ وحدة مربعة

مساحة قطعة الأرض = ٢٥ (٨×٨) = ١٦٠٠ متراً مربعًا.

مثال : طريقان الأول يمثله منحنى الدالة د حيث د(س) = |س-٥| ، و الثاني يمثله منحنى الدالة ر حيث ر(س) = ٥ - $\frac{٢}{٣}$ س ، اذا تقاطع الطريقان في نقطتي ا، ب أوجد المسافة بين ا،ب لأقرب كيلو متر اذا كانت وحدة الأطوال تمثل مسافة قدرها ٥ كيلومترات.

الحل :

يتقاطع الطريقان عندما د(س)= ر(س) ، ويكون |س-٥| = ٥ - $\frac{٢}{٣}$ س = ص

∴ س - ٥ = ٥ - $\frac{٢}{٣}$س أي س=٦ ، ص=١ ∴ ا = (٦،١)

أو س - ٥ = $\frac{٢}{٣}$ س - ٥ أي س=٠ ، ص=٥ ∴ ب = (٠،٥)

ا ب = $\sqrt{(٦-٥)^٢+(١-٥)^٢}$ = $\sqrt{٥٢}$ = ٢ $\sqrt{١٣}$

∵ وحدة الأطوال تمثل ٥ كيلومترات

∴ المسافة بين ا، ب = ٥ × ٢ $\sqrt{١٣}$ = ١٠ $\sqrt{١٣}$ ≃ ٣٦ كم

* حـل المتبـــايــنـات *

مجموعة حل المتباينة فى متغير واحد هى قيمة أو قيم المتغير التى تجعل المتباينة صحيحة

تذكر أن :

(١) إذا كان | س | = أ　فإن س = ± أ

(٢) | س | < أ　فإن - أ < س < أ

(٣) | س – ب | < أ　فإن - أ < س - ب < أ

(٤) | س – ب | ≤ أ　فإن - أ ≤ س - ب ≤ أ

(٥) | س | > أ　فإن س < - أ ، س > أ

(٦) | س – ب | ≥ أ　فإن س – ب ≤ - أ أو س – ب ≥ أ

ملاحظات هامة تستخدم عند حل متباينات المقياس :

(١) لا نستخدم صفر المقياس

(٢) عندما تكون علامة التباين (<) اصغر من :
تصبح مجموعة الحل على شكل فترة إما مفتوحة أو مغلقة .

(٣) عندما تكون علامة التباين (>) اكبر من :
تصبح مجموعة الحل على شكل ح ـ فترة معكوسة

(٤) يجب جعل س (التى داخل المقياس) فى بداية الكلام قبل حل المتباينة
مثلا : | ٣ - س | تصبح | س – ٣ | ، | ٥ ـ ٣ س | تصبح | ٣ س ـ ٥ |

(٥) عند ضرب أو قسمة طرفى المتباينة فى عدد سالب فإننا نعكس علامة التباين
مثلا : ـ ٢ س > ٥　فإن ٢ س < ـ ٥ ، ـ س < ٣ فإن س > ـ ٣

مثال : أوجد على صورة فترة مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

١) | س – ٥ | < ٢　　٢) | ٢ س + ٣ | ≥ ٥

٣) | ٣ س – ٤ | > ٥　　٤) | س + ٧ | ≥ ٠

الحل :

(١)　| س – ٥ | < ٢

إما س – ٥ < ٢ ⟸ س < ٢ + ٥ ⟸ س < ٧

أو - (س - ٥) < ٢ ⟸ س – ٥ > - ٢ ⟸ س > ٣

∴ م . ح =] ٣ ، ٧ [

(٢)　| ٢ س + ٣ | ⩽ ٥

إما ٢ س + ٣ ⩽ ٥ ⟸ ٢ س ⩽ ٥ – ٣ ⟸ ٢ س ⩽ ٢ ⟸ س ⩽ ١

أو – (٢ س + ٣) ⩽ ٥ ⟸ ٢ س + ٣ ⩾ – ٥ ⟸ ٢ س ⩾ – ٨ ⟸ س ⩾ - ٤

∴ س ∈ [- ٤ ، ١]

(٣)　| ٣ س – ٤ | > ٥

إما ٣ س – ٤ > ٥ ⟸ ٣ س > ٩ ⟸ س > ٣

أو – (٣ س – ٤) > ٥ ⟸ ٣ س – ٤ < - ٥ ⟸ ٣ س < - ١ ⟸ س < $\frac{-١}{٣}$

∴ م . ح = ح – [$\frac{-١}{٣}$ ، ٣]

(٤)　| س + ٧ | ⩾ ٠

إما س + ٧ ⩾ ٠ ⟸ س ⩾ – ٧

أو – (س + ٧) ⩾ ٠ ⟸ س + ٧ ⩽ ٠ ⟸ س ⩽ – ٧

∴ م . ح = ح

ملاحظة : عزيز الطالب أوجد مجموعة حل المتباينة | س + ٧ | > ٠ و لاحظ الفرق عن (٤)

مثال : أوجد على صورة فترة حل كل من المتباينات الآتية :

١) $\sqrt{\text{س}^{٢} - ٨\text{ س} + ١٦} < ٣$　　　٢) | ٥ – ٣ س | ⩾ ٢

٣) | ٢ س – ٣ | > ٩ - | ٦ – ٤ س |

الحل :

(١) $\sqrt{}$ س٢ − ٨س + ١٦ > ٣ ⟸ $\sqrt{}$ (س − ٤)٢ > ٣ ⟸ | س − ٤ | > ٣

إما س − ٤ > ٣ ⟸ س > ٣ + ٤ ⟸ س > ٧

أ، - (س − ٤) > ٣ ⟸ س − ٤ > - ٣ ⟸ س > ١

∴ س ∋] ١ ، ٧ [

(٢) | ٥ − ٣ س | ⩽ ٢ ⟸ | ٣ س − ٥ | ⩽ ٢

إما ٣ س − ٥ ⩽ ٢ ⟸ ٣ س ⩽ ٧ ⟸ س ⩽ $\frac{٧}{٣}$

أ، - (٣ س − ٥) ⩽ ٢ ⟸ ٣ س − ٥ ⩾ - ٢ ⟸ ٣ س ⩾ ٣ ⟸ س ⩾ ١

∴ س ∋ ح -] ١ ، $\frac{٧}{٣}$ [

(٣) | ٢ س − ٣ | > ٩ - | ٦ − ٤ س | ⟸ | ٢ س − ٣ | > ٩ - | ٤ س − ٦ |

⟸ | ٢ س − ٣ | > ٩ − ٢ | ٢ س − ٣ | ⟸ | ٢ س − ٣ | + ٢ | ٢ س − ٣ | >٩

⟸ ٣ | ٢ س−٣ | >٩ ⟸ | ٢ س−٣ | >٣

إما ٢ س − ٣ > ٣ ⟸ ٢ س > ٦ ⟸ س > ٣

أ، - (٢ س − ٣) > ٣ ⟸ - ٢ س + ٣ > ٣ ⟸ − ٢ س > ٠ ⟸ س > ٠

∴ م . ح = ح - [٠ ، ٣]

مثال : حل المتباينة : | ٣ س - ٤ | ≤ ٥

الحل :

٣ س - ٤ ≤ ٥	٣ س - ٤ ≥ - ٥
٣ س ≤ ٩	٣ س ≥ - ١
س ≤ ٣	س ≥ $\frac{-١}{٣}$
م . ح = [٣ ، ∞ [	م . ح =] - ∞ ، $\frac{-١}{٣}$]

م . ح = [٣ ، ∞ [∪] - ∞ ، $\frac{-١}{٣}$]

م . ح = ح -] $\frac{-١}{٣}$ ، ٣ [

$\frac{-١}{٣}$ ٣

تمارين على حل المعادلات و المتباينات

[١] أوجد جبريا مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية :

أ) $٢ |س + ١| - ٥ = ٠$ ب) $٢ |س + ٥| = ٤ + س$

جـ) $٣ |س - ١| - ٢ |٢ - س| = ٠$ د) $\sqrt{س^{٢} - ٤ س + ٤} = ٤$

[٢] أوجد على صورة فترة مجموعة حل كل من المتباينات الآتية:

أ) $|س - ٧| < ١١$ ب) $|٣س + ٧| \leq ٨$

جـ) $\sqrt{س^{٢} - ٦س + ٩} \geq ٨$ د) $\frac{١}{|٣س|} \geq ٥$

[٣] أكمل مايأتى:

(١) مجموعة حل المعادلة $|س| = \frac{١}{٢}$ هى ....

(٢) مجموعة حل المعادلة $|س| + ٣ = ٠$ هى ....

(٣) مجموعة حل المتباينة $|س - ٢| \leq ٠$ هى ....

[٤] أوجد جبريًا مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية:

١) $|س - ٢| = ٣$ ٥) $|٣ - ٢ س| = ٧$ ٩) $|س + ٢| = ٣ س - ١٠$

٢) $|س + ٢| + س - ٢ = ٠$ ٦) $س^{٢} + |س| = ٢$ ١٠) $س |س - ٢| + ٣ = ٠$

٣) $|س - ٢| = ٣ س - ٤$ ٧) $|س - ١| = س - ٢$ ١١) $\sqrt{س^{٢} - ٦س + ٩} + ٢س = ٩$

٤) $س |س| - ٥ |س| + ٦ = ٠$ ٨) $|س - ٢|^{٢} - |س - ٢| = ٠$ ١٢) $|٢س - ٦| = (س - ٣)^{٢}$

أوجد بيانيًا مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية:

١) $|٢س - ٣| = ٧$

٢) $|٢س - ٤| = |س + ١|$

٣) $|س - ٢| + |س + ١| = ٣$

٤) $|س + ٢| + س - ٢ = ٠$

٥) $|س| + س = ٠$

٦) $|س - ٣| = ٣ - س$

٧) $|س - ٢| = ٣س - ٤$

٨) $|س + ٢| = |س - ٣|$

أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية:

١) $|س - ١| < ٢$

٢) $|٢س - ٣| > ٧$

٣) $|٢س - ٣| \leqslant ١٥$

٤) $|٣س + ٢| + ٥ < ٤$

٥) $|٢س - ٣| + |٦ - ٤س| < ١٢$

٦) $|س - ٢| < ٣$

٧) $|٢س + ٣| \leqslant ٧$

٨) $|٣س - ٢| < ٤$

٩) $\sqrt{س^{٢} - ٢س + ١} \geqslant ٤$

١٠) $\frac{١}{|٢س - ٥|} \geqslant ٢$

١١) $|٢س - ٥| > ٣$

١٢) $|٢س - ٥| > ١$

١٣) $|٣س - ٧| \geqslant ٢$

١٤) $\sqrt{٤س^{٢} - ١٢س + ٩} \leqslant ٩$

١١) $\frac{١}{|٢س - ٣|} > ٢$

أوجد مجموعة قيم س التى تحقق :

١) $|س - ٣| + |س - ١| = ٨$

٢) $\sqrt{س^{٢} - ٤س + ٤} + |٦ - ٣س| < ٠$

٣) $|٣س - ١٠| > |س + ٢|$

٤) $(|٢س - ٣| - ٥)(|٢س - ٣| + ٥) > ٠$

مع تمنياتى للجميع بالنجاح و التفوق
معنا دائما فى القمة
عاشق الرياضيات المنفلوطى

الوحدة الثانيـة
الأسس و اللوغاريتمات و تطبيقات عليها

تذكر أن :

(١) إذا كان : $أ \in ح$ ، $ن \in ص^{+}$ فإن : $أ^{ن} = أ \times أ \times أ \times أ \times \cdots \times أ$
حيث أ مكرر كعامل ن من المرات و الرمز $أ^{ن}$ يقرا : أ أس ن
أ، القوة النونية للعدد أ أ، للأساس أ
مثلا : $(٢\sqrt{٥})^{٤} = ٢^{٤} \times (\sqrt{٥})^{٤} = ١٦ \times ٢٥$

(٢) $أ^{صفر} = ١$ بشرط $أ \neq ٠$ لان $(صفر)^{صفر}$ غير معرف
مثلا $(-٧)^{صفر} = ١$ ، $٥^{ص} = ١$ فإن ص = صفر

(٣) إذا كان أ عدد حقيقى ≠ صفر ، م عدد صحيح موجب
فإن : $أ^{م} = \frac{١}{أ^{-م}}$ ، $أ^{-م} = \frac{١}{أ^{م}}$
مثلا : $٣^{٤} = \frac{١}{٣^{-٤}} = ٨١$ ، $٧^{-٢} = \frac{١}{٧^{٢}}$

ملاحظات :

١- العدد $أ^{م}$ معكوس ضربى للعدد $أ^{-م}$ حيث أن : $أ^{م} \times أ^{-م} = أ^{صفر} = ١$
مثلا : $٣^{-٥} \times ٣^{٥} = ١$ ، $(\sqrt{٥})^{٤} \times (\sqrt{٥})^{-٤} = ١$

٢- $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{م} = \left(\frac{ب}{أ}\right)^{-م}$ مثلا : $\left(\frac{٣}{٢}\right)^{-٤} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٤} = \frac{١٦}{٨١}$

قوانين الأسس : (قوانين القوى الصحيحة فى ح)

إذا كان : أ ، ب $\in$ ح ، ن $\in$ ص فإن :

١- $أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م+ن}$ مثلا $٧^{٣} \times ٧^{٢} = ٧^{٥}$ ، $(\sqrt{٣})^{٣} \times (\sqrt{٣}) = (\sqrt{٣})^{٤} = ٩$

٢- $أ^{م} \div أ^{ن} = أ^{م-ن}$ مثلا $٣^{٧} \div ٣^{٣} = ٣^{٧-٣} = ٣^{٤} = ٨١$
، $(-\sqrt{٥})^{١٥} \div (-\sqrt{٥})^{١٢} = (-\sqrt{٥})^{٣} = -٥\sqrt{٥}$

٣- $(\text{م ب})^{\text{ن}} = \text{م}^{\text{ن}} \times \text{ب}^{\text{ن}}$ مثلا $١٥^{\text{ن}} = (٣ \times ٥)^{\text{ن}} = ٣^{\text{ن}} \times ٥^{\text{ن}}$

٤- $(\text{م} \div \text{ب})^{\text{ن}} = \text{م}^{\text{ن}} \div \text{ب}^{\text{ن}}$ مثلا $\left(\frac{٣}{٥}\right)^{\text{ن}} = \frac{٣^{\text{ن}}}{٥^{\text{ن}}}$ ، $\frac{٥^{\text{ن}}}{٧^{\text{ن}}} = \left(\frac{٥}{٧}\right)^{\text{ن}}$

٥- $(\text{م}^{\text{م}})^{\text{ن}} = \text{م}^{\text{م ن}}$ مثلا $(\text{س}^{٣})^{٢} = \text{س}^{٦}$ ، $(٣^{٢})^{\text{س}} = ٣^{٢\text{س}}$

ملاحظات :

(١) $(\text{م} + \text{ب})^{\text{ن}} \neq \text{م}^{\text{ن}} + \text{ب}^{\text{ن}}$ ، $(\text{م} - \text{ب})^{\text{ن}} \neq \text{م}^{\text{ن}} - \text{ب}^{\text{ن}}$

(٢) $(-\text{م})^{\text{ن}} = \text{م}^{\text{ن}}$ (حيث ن عدد زوجى) مثلا $(-٣)^{٤} = ٣^{٤} = ٨١$

(٣) $(-\text{م})^{\text{ن}} = -\text{م}^{\text{ن}}$ (حيث ن عدد فردى) مثلا $(-٣)^{٣} = -٣^{٣} = -٢٧$

مثال : اختصر لابسط صورة : $\frac{٥^{٣\text{ن}+١} \times ٢٧^{\text{ن}}}{١٥^{٣\text{ن}}}$

الحل : $\frac{٥^{٣\text{ن}+١} \times ٢٧^{\text{ن}}}{١٥^{٣\text{ن}}} = \frac{٥^{٣\text{ن}+١} \times (٣^{٣})^{\text{ن}}}{(٣ \times ٥)^{٣\text{ن}}} = \frac{٥^{٣\text{ن}+١} \times ٣^{٣\text{ن}}}{٣^{٣\text{ن}} \times ٥^{٣\text{ن}}}$

$= ٥^{٣\text{ن}+١-٣\text{ن}} \times ٣^{٣\text{ن}-٣\text{ن}} = ٥ \times ٣^{٠} = ٥ \times ١ = ٥$

مثال : أوجد فى ابسط صورة قيمة $\frac{(٢٧)^{-٣} \times (١٢)^{٢}}{١٦ \times (٨١)^{-٢}}$

الحل: المقدار = $\frac{(٣^{٣})^{-٣} \times (٣ \times ٢^{٢})^{٢}}{٢^{٤} \times (٣^{٤})^{-٢}} = \frac{٣^{-٩} \times ٣^{٢} \times ٢^{٤}}{٢^{٤} \times ٣^{-٨}}$

$= ٣^{-٩+٢+٨} \times ٢^{٤-٤} = ٣^{١} \times ٢^{\text{صفر}} = ٣ \times ١ = ٣$

مثال : إذا كان $٣^{\text{س}+١} + ٣^{\text{س}-١} = ١٠$ فأوجد قيمة س

الحل :

$٣^{\text{س}+١} + ٣^{\text{س}-١} = ٣^{\text{س}-١}(٣^{٢} + ١) = ٣^{\text{س}-١}(٩ + ١) = ٣^{\text{س}-١} \times ١٠ = ١٠$

$\therefore ٣^{\text{س}-١} = ١$ $\therefore$ س $-١ = ٠$ $\therefore$ س $= ١$

حل آخر : $٣^{\text{س}}(٣ + ٣^{-١}) = ١٠ \Leftarrow ٣^{\text{س}} \times \frac{١٠}{٣} = ١٠ \Leftarrow ٣^{\text{س}} = ١٠ \times \frac{٣}{١٠} = ٣$

مثال : أثبت أن $\frac{٥ \times ٣^{٢ن} - ٤ \times ٣^{٢ن-١}}{٢ \times ٣^{٢ن+١} - ٣^{٢ن}} = \frac{١١}{١٥}$

الحل : الطرف الأيمن = $\frac{٥ \times ٣^{٢ن} - ٢^{٢} \times ٣^{٢ن-١}}{٣^{٢ن}(٢ \times ٣ - ١)} = \frac{٣^{٢ن}(٥ - ٢^{٢} \times ٣^{-١})}{٣^{٢ن}(٢ \times ٣ - ١)}$

$= \frac{٥ - \frac{٤}{٣}}{٥} = \frac{١١}{٣} \div ٥ = \frac{١١}{٣} \times \frac{١}{٥} = \frac{١١}{١٥}$ = الطرف الأيسر

مثال : اختر الاجابة الصحيحة :

(أ) إذا كانت أ ∈ ح⁻ ، ن عدد صحيح فردى، فحدد العبارات الصحيحة فيما يأتى:

(أ) $أ^{ن} > ٠$ (ب) $أ^{ن} < ٠$ (جـ) $أ^{ن} \geqslant ٠$ (د) $أ^{ن} \leqslant ٠$

(ب) إذا كانت أ ∈ ح -{٠}، ن عدد صحيح زوجى، فحدد العبارات الصحيحة فيما يأتى:

(أ) $أ^{ن} > ٠$ (ب) $أ^{ن} < ٠$ (جـ) $أ^{ن} \geqslant ٠$ (د) $أ^{ن} \leqslant ٠$

ملاحظات :

١) عند حل مسائل الأسس لابد من جعل الأساس عددا أوليا (٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١ ، .....)

٢) إذا كانت $٧^{٢س} + ٤ \times ٧^{س}$ يمكن فرض $٧^{س} =$ ص ∴ $ص^{٢} + ٤$ ص

٣) إذا كان الكسر $\frac{٣^{س} \times ٧^{٥} \times ٣^{ص}}{٧^{س} \times ٣^{٢س+١}}$ يمكن كتابته $٣^{س+ص-س} \times ٧^{٥-٢س-١}$

نستغنى عن شرطة الكسر

* الجذور النونية :

المعادلة $س^{٢} = ٩$ لها جذران حقيقيان هما ٣ ، - ٣

المعادلة $س^{٣} = ٨$ لها حل وحيد هو ٢ (و باقى الجذور اعداد مركبة) و هكذا .....

بوجة عام : المعادلة $س^{ن} = أ$ حيث أ ∈ ح , ن ∈ $ص^{+}$ لها ن من الجذور

الحالات المختلفة للمعادلة $س^{ن} = أ$:

[١] إذا كان ن زوجيا ، أ موجبا :

فإن المعادلة لها جذران حقيقيان أحدهما موجب و الآخر سالب (باقى الجذور أعداد مركبة)

و يرمز لهما $\sqrt[ن]{أ}$ ، ـ $\sqrt[ن]{أ}$ و يسمى الجذر النونى الموجب للعدد أ **بالجذر النونى الآساسى للعدد أ**

مثلا : المعادلة $س^{٤} = ٨١$ لها جذران هما $\sqrt[٤]{٨١} = ٣$ ، ـ $\sqrt[٤]{٨١} = ـ ٣$

[٢] إذا كان ن زوجيا ، أ سالبا : المعادلة $س^{ن} = أ$ ليس لهل جذور حقيقية [حذورها تخيلية]

مثلا : المعادلة $س^{٤} = - ١٦$ ليس لها جذور حقيقية [لها جذران تخيليان ٤ ت ، - ٤ ت]

[٣] إذا كان ن فرديا ، أ ∈ ح :

فإن المعادلة $س^{ن} = أ$ لها جذر حقيقى وحيد هو $\sqrt[ن]{أ}$ (باقى الجذور أعداد مركبة)

مثلا : المعادلة $س^{٥} = ـ ٣٢$ لها جذر حقيقى وحيد هو $\sqrt[٥]{ـ ٣٢} = - ٢$

[٤] إذا كان ن ∈ $ص^{+}$ ، أ = صفر :

فإن المعادلة $س^{ن} =$ صفر لها حل حقيقى وحيد هو صفر

مثلا : المعادلة $س^{م} =$ صفر فإن س = صفر

مثال : أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

(أ) $س^{٤} = ١٦$ (ب) $س^{٥} = ٢٤٣$

الحل: (أ) $س^{٤} = ١٦$ ∴ س = ± $\sqrt{١٦}$ = ± ٢ (و باقى الجذور اعداد مركبة)

∴ م . ح = { ٢ ، - ٢ }

(ب) $س^{٥} = ٢٤٣$ ∴ س = $\sqrt[٥]{٢٤٣}$ = ٣ (و باقى الجذور اعداد مركبة)

∴ م . ح = { ٣ }

*** الأسس الكسرية :**

مثلا : $\sqrt{أ} = (أ)^{\frac{١}{٢}}$ ، $\sqrt{٣} = (٣)^{\frac{١}{٢}}$ ، $\sqrt[٣]{أ} = (أ)^{\frac{١}{٣}}$ ، $\sqrt[٣]{٧} = (٧)^{\frac{١}{٣}}$

بوجة عام : $\sqrt[ن]{أ} = أ^{\frac{١}{ن}}$

، $\sqrt[ن]{أ^{ن}} = أ^{\frac{ن}{ن}} = أ$ يراعى ن زوجى أو فردى

ملاحظة : [١] $\sqrt[ن]{أ^{ن}} = |أ|$ إذا كان ن زوجى [مثلا $\sqrt[٤]{١٦} = \sqrt[٤]{|-٢|^{٤}} = \sqrt[٤]{|٢|^{٤}} = ٢$]

[٢] $\sqrt[ن]{أ^{ن}} = أ$ إذا كان ن فردى [مثلا $\sqrt[٥]{٣٢} = ٢$ ، $\sqrt[٥]{-٣٢} = - ٢$]

* خواص الجذور النونية :

إذا كان $\sqrt[ن]{أ}$ ، $\sqrt[ن]{ب}$ $\in$ ح ، أ $\in$ ح - { ٠ } ، ن $\in$ $ص^{+}$ - {١} ، م $\in$ ص فإن :

[١] $\sqrt[ن]{أب} = \sqrt[ن]{أ} \times \sqrt[ن]{ب}$ **مثلا** $\sqrt[٣]{٥ \times ٣} = \sqrt[٣]{٥} \times \sqrt[٣]{٣}$ ، $\sqrt[٧]{٢} \times \sqrt[٧]{٣} = \sqrt[٧]{٦}$

[٢] $\sqrt[ن]{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt[ن]{أ}}{\sqrt[ن]{ب}}$ ، ب $\neq$ ٠ **مثلا** $\sqrt[٥]{\frac{٣}{٥}} = \frac{\sqrt[٥]{٣}}{\sqrt[٥]{٥}}$ ، $\frac{\sqrt[٣]{٢}}{\sqrt[٣]{٤}} = \sqrt[٣]{\frac{٢}{٤}} = \sqrt[٣]{\frac{١}{٢}}$

[٣] $\sqrt[ن]{أ^{م}} = (\sqrt[ن]{أ})^{م} = أ^{\frac{م}{ن}}$ **مثلا** $\sqrt[٥]{س^{٢}} = (\sqrt[٥]{س})^{٢} = (س)^{\frac{٢}{٥}}$

ملحوظة : يمكن تعميم قوانين الأسس الكسرية حيث انها تخضع لنفس قوانين الاسس الصحيحة

مثال : أوجد (إن أمكن) قيمة كل من :

[١] $-\sqrt{٣٦}$ [٢] $-(٨١)^{\frac{١}{٤}}$ [٣] $(-١٢٥)^{\frac{١}{٣}}$

[٤] $|\sqrt[٧]{-١٢٨}|$ [٥] $(-٩)^{\frac{١}{٢}}$ [٦] $(-٢٥)^{\frac{١}{٤}}$

الحل :

[١] $-\sqrt{٣٦} = -\sqrt{٦^{٢}} = -٦$

[٢] $-(٨١)^{\frac{١}{٤}} = -[(٣)^{٤}]^{\frac{١}{٤}} = ٣^{\frac{٤}{٤}} = ٣$

[٣] $(-١٢٥)^{\frac{١}{٣}} = [(-٥)^{٣}]^{\frac{١}{٣}} = (-٥)$

[٤] $|\sqrt[٧]{-١٢٨}| = |\sqrt[٧]{(-٢)^{٧}}| = |-٢| = ٢$

[٥] $(-٩)^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{-٩} \notin$ ح

[٦] $(-٢٥)^{\frac{١}{٤}} = \sqrt[٤]{-٢٥} \notin$ ح

مثال : أوجد فى أبسط صورة كل من :

[١] $-\sqrt[٣]{٨أ^{٦}ب^{٩}}$ [٢] $\sqrt[٤]{١٦س^{٤}ص^{٨}}$ [٣] $\sqrt[٤]{١٦أ^{١٢}}$ [٤] $\sqrt[٦]{(س+٢ص)^{١٨}}$

الحل : [١] $-\sqrt[٣]{٨أ^{٦}ب^{٩}} = -\sqrt[٣]{٨} \times \sqrt[٣]{أ^{٦}} \times \sqrt[٣]{ب^{٩}} = -٢أ^{\frac{٦}{٣}} \times ب^{\frac{٩}{٣}} = -٢أ^{٢}ب^{٣}$

[٢] $\sqrt[4]{16\ س^4\ ص^8} = \sqrt[4]{16} \times \sqrt[4]{س^4} \times \sqrt[4]{ص^8} = 2 \times |س| \times |ص|^2 = 2\ س\ ص^2$

[٣] $\sqrt[4]{16\ أ^{12}} = \sqrt[4]{16} \times \sqrt[4]{أ^{12}} = 2 \times أ^{\frac{12}{4}} = 2\ أ^3$

[٤] $\sqrt[6]{(س+2\ ص)^{18}} = (س + 2\ ص)^{\frac{18}{6}} = (س + 2\ ص)^3$

مثال : أوجد فى ابسط صورة : $\dfrac{3^{\frac{1}{2}} \times (147)^{\frac{1}{6}}}{(63)^{\frac{1}{3}}}$

الحل : المقدار $= \dfrac{3^{\frac{1}{2}} \times (3 \times 7^2)^{\frac{1}{6}}}{(3^2 \times 7)^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{6}} \times 7^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{2}{3}} \times 7^{\frac{1}{3}}}$

$= 3^{\frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{2}{3}} \times 7^{\frac{1}{3} - \frac{1}{3}} = 3^{صفر} \times 7^{صفر} = 1 \times 1 = 1$

مثال : أثبت أن $\dfrac{(343)^{2س - \frac{1}{3}} \times (4)^{3س+1}}{(196)^{3س} \times 4} = \dfrac{1}{7}$

الحل : الطرف الأيمن $= \dfrac{(7^3)^{2س - \frac{1}{3}} \times (4)^{3س+1}}{(7^2 \times 4)^{3س} \times 4} = \dfrac{(7)^{6س - 1} \times (4)^{3س+1}}{(7)^{6س} \times (4)^{3س} \times 4}$

$= 7^{6س - 1 - 6س} \times 4^{3س + 1 - 3س - 1}$

$= 7^{-1} \times 4^{صفر} = \dfrac{1}{7} \times 1 = \dfrac{1}{7} =$ الأيسر

مثال : إذا كان طول نصف قطر كرة (نق) يُعطى بالعلاقة نق $= \sqrt[3]{\dfrac{3\ ح}{4\ \pi}}$ ، حجمها ٦٠٠ سم^3

فأوجد مقربا الناتج لثلاثة أرقام عشرية حيث ح حجم الكرة :

١) طول نصف قطر الكرة　　　٢) مساحة سطح الكرة

الحل : نق = $\sqrt[3]{\frac{٣ ح}{٤ \pi}}$ = $\sqrt[3]{\frac{٣ \times ٦٠٠}{٤ \pi}}$ ≃ ٥.٢٣٢٢٣ ≃ ٥.٢٣٢ سم

مساحة سطح الكرة = ٤ π نق^٢ = ٤ × π × (٥.٢٣٢)^٢ ≃ ٣٤٣.٩٨٩٦١٧٥

≃ ٣٤٣.٩٨٩ سم^٢

* **حل المعـــادلات الأسية فى ح :**

ملاحظة هامة :

١) إذا كان س$^{\frac{م}{ن}}$ = أ فإن س = أ$^{\frac{ن}{م}}$ حيث م عدد فردى

مثلا : س$^{\frac{١}{٣}}$ = ٢ ∴ س = ٢$^{\frac{٣}{١}}$ = ٢^٣ = ٨ ، س$^{\frac{٣}{٥}}$ = ٣$^{\frac{٥}{٣}}$

٢) إذا كان س$^{\frac{م}{ن}}$ = أ فإن س = ± أ$^{\frac{ن}{م}}$ حيث م عدد زوجى ، م ، ن ليس بينهما عامل مشترك

مثال : أوجد مجموعة الحل فى ح لكل من المعادلات الآتية :

١) س$^{\frac{٣}{٥}}$ = ٢٧   ٢) (س – ٢)$^{\frac{٢}{٣}}$ = ٢٥

٣) س$^{\frac{٤}{٥}}$ ـ ١٠ س$^{\frac{٢}{٥}}$ + ٩ = ٠   ٤) س$^{\frac{٤}{٣}}$ ـ ٣ س$^{\frac{٢}{٣}}$ ـ ٤ = ٠

٥) (س + ١)$^{-\frac{٥}{٢}}$ = ٣٢$^{-\frac{١}{٢}}$

الحل :

[١] س$^{\frac{٣}{٥}}$ = ٢٧ برفع الطرفين للقوة ٥

∴ س^٣ = (٢٧)^٥ بأخذ الجذر التكعيبى للطرفين

∴ س = ($\sqrt[3]{٢٧}$)^٥ = ٣^٥ = ٢٤٣

∴ م . ح = { ٢٤٣ }

حل آخر :

س$^{\frac{٣}{٥}}$ = ٢٧ برفع الطرفين للقوة $\frac{٥}{٣}$

∴ س = (٢٧)$^{\frac{٥}{٣}}$ = [(٣)^٣]$^{\frac{٥}{٣}}$ = ٣^٥

∴ س = ٢٤٣

∴ م . ح = { ٢٤٣ }

[٢] $(س - ٢)^{\frac{٢}{٣}} = ٢٥$ برفع الطرفين للقوة ٣

∴ $(س - ٢)^{٣ \times \frac{٢}{٣}} = (٢٥)^{٣}$

∴ $(س - ٢)^{٢} = (٢٥)^{٣}$

∴ $س - ٢ = \pm (\sqrt{٢٥})^{٣} = \pm ٥^{٣}$

∴ س - ٢ = ١٢٥ أو س - ٢ = - ١٢٥

∴ س = ١٢٧ أو س = - ١٢٣

∴ م . ح = { ١٢٧ ، - ١٢٣ }

<u>حل آخر</u> :

$س - ٢ = \pm (٢٥)^{\frac{٣}{٢}} = \pm (\sqrt{٢٥})^{٣} = \pm ٥^{٣}$

∴ س - ٢ = ± ١٢٥

∴ س - ٢ = ١٢٥ أو س - ٢ = - ١٢٥

∴ س = ١٢٧ أو س = - ١٢٣

∴ م . ح = { ١٢٧ ، - ١٢٣ }

---

[٣] $س^{\frac{٤}{٥}} - ١٠ س^{\frac{٢}{٥}} + ٩ = ٠$

$(س^{\frac{٢}{٥}} - ٩)(س^{\frac{٢}{٥}} - ١) = ٠$ بالتحليل

∴ $س^{\frac{٢}{٥}} - ٩ = ٠$ ، $س^{\frac{٢}{٥}} - ١ = ٠$

∴ $س^{\frac{٢}{٥}} = ٩$

∴ $س^{٢} = ٩^{٥}$

∴ $س = \pm (\sqrt{٩})^{٥}$

∴ $س = \pm ٣^{٥}$

س = ± ٢٤٣

∴ $س^{\frac{٢}{٥}} = ١$

∴ $س^{٢} = ١^{٥} = ١$

∴ س = ± ١

∴ م . ح = { ٢٤٣ ، - ٢٤٣ ، ١ ، - ١ }

[٤] $س^{\frac{٤}{٣}} - ٣ س^{\frac{٢}{٣}} - ٤ = ٠$

$(س^{\frac{٢}{٣}} - ٤)(س^{\frac{٢}{٣}} + ١) = ٠$

∴ $س^{\frac{٢}{٣}} = ٤$

∴ $س^{٢} = ٤^{٣}$

∴ $س = \pm (\sqrt{٤})^{٣}$

∴ $س = \pm ٢^{٣} = \pm ٨$

∴ م . ح = { ٨ ، - ٨ }

$س^{\frac{٢}{٣}} = - ١$

$س^{٢} = (- ١)^{٣} = - ١$

$س = \pm \sqrt{- ١} \notin ح$

[٥] $(\text{س} + 1)^{-\frac{5}{2}} = 32^{-\frac{1}{2}}$

الحل : برفع الطرفين للقوة ـ ٢

∴ $(\text{س} + 1)^{5} = 32$ بأخذ الجذر للقوة ٥

∴ $\text{س} + 1 = \sqrt[5]{32} = 2$

∴ $\text{س} = 2 - 1 = 1$

∴ م . ح = { ١ }

حل آخر :

برفع الطرفين للقوة ٢

∴ $(\text{س} + 1)^{-5} = 32^{-1}$

∴ $(\text{س} + 1)^{5} = 32$

∴ $\text{س} + 1 = (2^{5})^{\frac{1}{5}} = 2$

∴ $\text{س} = 2 - 1 = 1$

تمارين على الأسس الكسرية والجذور النونية والمعادلات

[١] اختصر : $\dfrac{\sqrt{8} \times 4^{-1} \times 2^{-\frac{2}{3}}}{6^{-2} \times 3^{2}}$

[٢] متى تكون العلاقة $\sqrt[n]{\text{أ}} \times \sqrt[n]{\text{ب}}$ صحيحة لجميع قيم أ ، ب الحقيقية .

[٣] أكمل ما يأتى :

(أ) $(8)^{\frac{2}{3}}$ فى ابسط صورة تساوى .... (ب) $(6\frac{1}{4})^{\frac{3}{2}}$ فى ابسط صورة تساوى ....

(جـ) $(\frac{16}{625})^{-\frac{3}{4}}$ فى أبسط صورة تساوى ..... (د) $\sqrt[3]{(3\frac{1}{4})^{-1}}$ فى أبسط صورة تساوى ......

(هـ) $(5^{2} - 3^{2})^{\frac{1}{3}}$ فى أبسط صورة ....

(٤) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(أ) إذا كان $5^{\text{س}} = 2$ فإن $25^{\text{س}}$ تساوى .... (١٠ ، ٦٢٥ ، ٤ ، ٢)

(ب) $(2^{7} \div 2^{5})^{-\frac{1}{2}}$ تساوى .... (٢ ، -٢ ، $\frac{1}{2}$ ، $-\frac{1}{2}$)

(جـ) إذا كان $\text{س}^{\frac{2}{3}} = 64$ فإن س تساوى .... (٥١٢ ، ١٦ ، ٤ ، ٢)

(د) أي مما يأتي لا يكافئ $\sqrt[5]{س^{4}}$ $\left((\sqrt[5]{س})^{4} ، \sqrt[4]{س^{5}} ، س^{\frac{4}{5}} ، (س^{\frac{1}{5}})^{4} \right)$

(هـ) إذا كان $٤ س^{٥} = ١٢٨$ فإن س تساوى .... (٤ ، ±٢ ، ٢ ، -٢)

(و) مجموعة الجذور الحقيقية للمعادلة $(س - ٢)^{٤} = ١٦$ يساوي .... ({صفر} ، {٤} ، {٨} ، {٠، ٤})

(ز) إذا كان $٣^{أ} = ٤^{ب}$ فإن $٩^{\frac{أ}{ب}} + ١٦^{\frac{ب}{أ}}$ تساوى .... (٧ ، ١٢ ، ٢٠ ، ٢٥)

[٥] اكتشف الخطأ :

(أ) $-٩ = (-٩) = (-٩)^{\frac{٢}{٢}} = \sqrt{(-٩)^{٢}} = \sqrt{٨١} = ٩$

(ب) إذا كان $س^{٤} = ٨١$ فإن $س = \sqrt[٤]{٨١}$ ∴ $س = ٣$

[٦] إذا كان طول نصف قطر كرة يعطى بدلالة الحجم من العلاقة $نق = \left(\frac{٣ ع}{٤ \pi}\right)^{\frac{١}{٢}}$ أوجد الزيادة فى طول نصف القطر عندما يتغير الحجم من $\frac{٣٢}{٣} \pi$ إلى ٣٦π وحدة مكعبة .

[٧] أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

(أ) $س^{\frac{٥}{٢}} = \frac{١}{٣٢}$

(ب) $س^{٤} = ٨١$

(جـ) $\sqrt[٥]{(س-١)^{٥}} = ٣٢$

(د) $(س^{٢} - ٥س + ٩)^{\frac{٥}{٢}} = ٢٤٣$

(هـ) $س^{\frac{٤}{٥}} - ٥س^{\frac{٢}{٥}} + ٤ = صفر$

(و) $س + ١٥ = ٨ \sqrt{س}$

(ز) $\sqrt[٣]{س^{٢}} - ٢٥ \sqrt[٣]{س} - ٥٤ = صفر$

(ح) $(٢س - ١)^{٤} = (س + ٣)^{٤}$

[٨] إذا كان $س^{\frac{٣}{٢}} = ٣ ص^{\frac{٢}{٣}} = ٢٧$ فما قيمة س + ص

[٩] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(أ) إذا كان س < صفر فإن: $\sqrt{س^{٢}} - \sqrt[٣]{س^{٣}} - \sqrt{س^{٢} - ٢س + ١} + ١ =$ ...... (س ، -س ، صفر ، -١)

(ب) إذا كان $أ = \sqrt[٤]{\frac{\sqrt[٣]{٢}}{\sqrt{٧}}}$ فأي الأعداد الآتية عدد نسبي .... ($أ^{١٢}$ ، $أ^{١٦}$ ، $أ^{١٨}$ ، $أ^{٢٤}$)

[١٠] اختصر لأبسط صورة:

(أ) $\dfrac{٥^{٢س} \times ٤^{س}}{١٠^{٢س-١}}$ (ب) $\dfrac{٥ \times ٣^{٢ن} - ٤ \times ٣^{٢ن-١}}{٢ \times ٣^{٢ن+١} - ٣^{٢ن}}$

[١١] اختر الاجابة الصحيحة :

$\dfrac{أ^{س+٢} + أ^{س+١} + أ^{س}}{أ^{س+١} + أ^{س} + أ^{س-١}} = \ldots\ldots$ [أ ، أ − ١ ، أس ، ١]

---

* الدالة الأسية و تطبيقاتها :

تعريف : إذا كانت د : ح ← ح⁺ حيث د(س) = $أ^{س}$ لكل أ ∈ $ح_+$ - { ١ }
، س ∈ ح ولهذا يكون مجالها = ح ، $أ^{س}$ ∈ $ح^+$ ولهذا يكون مداها = $ح^+$
فإن د تسمى دالة أسية أساسها أ

مثل : د(س) = $٣^{س}$ اساسها ٣ ، أسها س
، د(س) = $(\frac{١}{٢})^{س+٢}$ اساسها $\frac{١}{٢}$ ، أسها س + ٢

تذكر أن :

[١] الدالة الجبرية : يكون المتغير المستقل (س) هو الأساس أما الأس عدد حقيقى
مثل : د(س) = $س^{٢}$ ، د(س) = $س^{٣}$ + س ، ٠٠٠٠٠

[٢] الدالة الأسية : يكون المتغير المستقل (س) هو الأس أما الأساس هوعدد حقيقى موجب لا يساوى الواحد
مثل : د(س) = $٢^{س}$ ، د(س) = $٣^{س-١}$ ، ٠٠٠٠٠٠

مثال : بين أى الدوال الآتية دالة أسية، ثم اكتب أسها وأساسها.

(أ) د(س) = $س^{٢}$ (ب) د(س) = $(٢)^{س}$

(جـ) د(س) = $\dfrac{٣}{س + ١}$ (د) د(س) = $س^{٣}$ - ١

(هـ) د(س) = $(\frac{٣}{٤})^{س-١}$ (و) د(س) = $(-٢)^{س}$

* التمثيل البيانى للدالة الأسية :

إذا كانت د (س) = أ^س فإن الخط البياني للدالة د(س) يمثل بالأزواج المرتبة (س ، أ^س)

(١) إذا كانت : أ > ١

- المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ١)
- المجال = ح
- المدى = ح+ أى] ٠ ، ∞ [
- الدالة تزايدية على ح
- الدالة ليست زوجية وليست فردية
- المنحنى يقع بكامله فوق محور السينات

(٢) إذا كانت ٠ < أ < ١

- المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ١)
- المجال = ح
- المدى = ح+ أى] ٠ ، ∞ [
- الدالة تناقصية على ح
- الدالة ليست زوجية وليست فردية
- المنحنى يقع بكامله فوق محور السينات

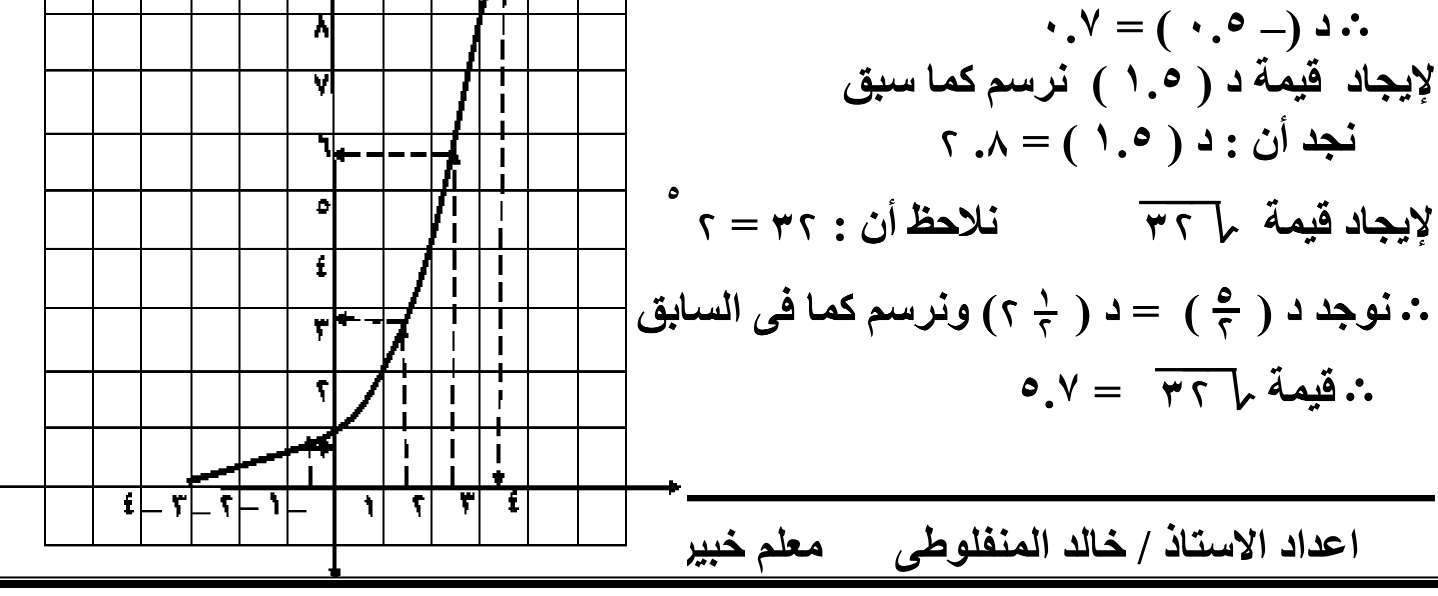
مثال : أرسم منحنى الدالة د (س) = ٢^س في الفترة [– ٣ ، ٤] و من الرسم أوجد :

(١) د (– ٠.٥) (٢) د (١.٥)

(٣) قيمة تقريبية للعدد $\sqrt[5]{٣٢}$ (٤) حل المعادلة د (س) = ١٠

الحل :

س	٤	٣	٢	١	٠	– ١	– ٢	– ٣
ص	١٦	٨	٤	٢	١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٨}$



لإيجاد قيمة د (– ٠.٥) :
نرسم مستقيماً عند – ٠.٥ يوازى محور الصادات ليقابل المنحنى عند نقطة فنجدها تساوى تقريباً ٠.٧

∴ د (– ٠.٥) = ٠.٧

لإيجاد قيمة د (١.٥) نرسم كما سبق
نجد أن : د (١.٥) = ٢.٨

لإيجاد قيمة $\sqrt[5]{٣٢}$ نلاحظ أن : ٣٢ = ٢^٥

∴ نوجد د ($\frac{٥}{٢}$) = د ($\frac{١}{٢}$ ٢) ونرسم كما فى السابق

∴ قيمة $\sqrt[5]{٣٢}$ = ٥.٧

لإيجاد حل المعادلة : د (س) = ١٠
نرسم مستقيماً عند ص = ١٠ يوازى محور السينات
يقابل المنحنى عند نقطة فنجدها تساوى تقريبا ٣.٣
∴ د (س) = ١٠ عندما س = ٣.٣

ملاحظات :

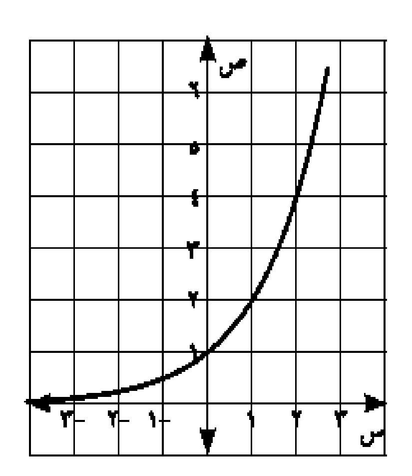
(أ) مجال الدالة = ع (ب) المدى ح+

(ج) الدالة متزايدة على مجالها لكل أ > ١ وتسمى بدالة النمو الأسى

(د) الدالة متناقصة على مجالها لكل ٠ < أ < ١ وتسمى بدالة التضاؤل الأسى.

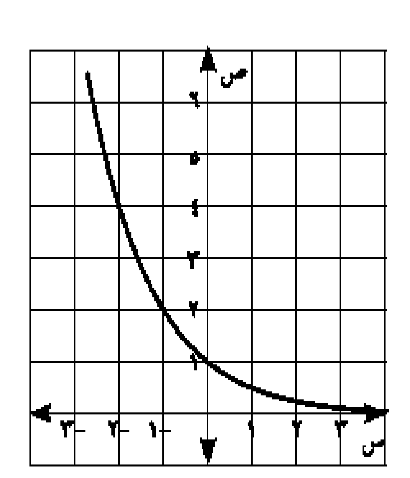
(هـ) احداثيى نقطة تقاطع الدالة الأسية مع محور الصادات هى (٠ ، ١)

خواص الدالة الأسية:



د(س) = أ^س عندما أ > ١

- تسمى الدالة د دالة نمو أسي، وتكون تزايدية على مجالها ع، ويقترب خطها البياني من محور السينات (الاتجاه السالب).
- أ^س > ١ عندما س ∈ ع+
- ٠ < أ^س < ١ عندما س ∈ ع-



د(س) = أ^س عندما ١ > س > ٠

- تسمى الدالة ر دالة تضاؤل أسي، وتكون تناقصية على مجالها ع، ويقترب خطها البيانى من محور السينات (الاتجاه الموجب).
- أ^س > ١ عندما س ∈ ع-
- ٠ < أ^س < ١ عندما س ∈ ع+

منحنى الدالتين د، ر حيث د(س) = أ^س ، ر(س) = $(\frac{1}{أ})^{س}$ متماثلان معًا بالنسبة لمحور الصادات.

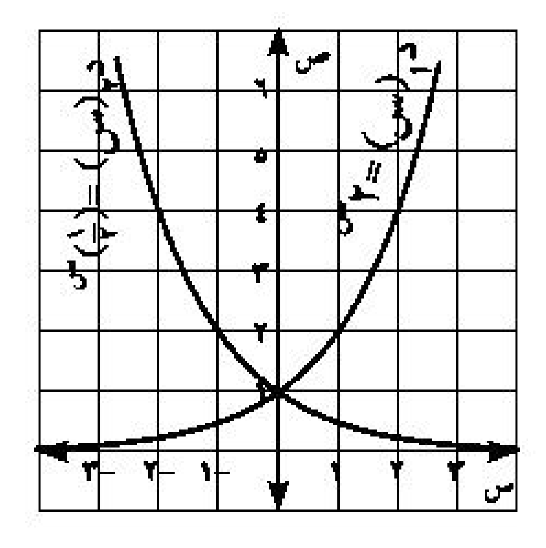
ارسم فى شكل واحد منحنى كل من الدالتين $د_١$، $د_٢$ حيث : $د_١(س) = (٢)^{س}$
، $د_٢(س) = (\frac{١}{٢})^{س}$ حيث س ∋ ع ومن الرسم أوجد:

(أ) المدى لكل من الدالتين $د_١$، $د_٢$. (ب) إحداثيى النقطة المشتركة لتقاطع الدالتين.

(جـ) معادلة محور التماثل لمنحنى الدالتين معًا (الشكل المرسوم).

الحل : نكون الجدول الآتى :

س	- ٣	- ٢	- ١	٠	١	٢	٣
$د_١(س)$	$\frac{١}{٨}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٤	٨
$د_٢(س)$	٨	٤	٢	١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٨}$



من الرسم نجد أن:

١) مدى كل من الدالتين $د_١$، $د_٢$ هو $ع^+$.

٢) إحداثيى النقطة المشتركة لتقاطع الدالتين هو (٠ ، ١).

٣) معادلة محور التماثل لمنحنى الدالتين هو المستقيم س = ٠ (محور الصادات).

مثال : اذا كانت د (س) = $٣^{س}$ فأكمل ما يأتى:

(أ) د(٢) = ... (ب) د(س + ٢) = ... × د (س) (جـ) د (س) × د (-س) = ...

الحل

(أ) د(٢) = $٣^٢$ = ٩ (ب) د (س + ٢) = $٣^{س+٢}$ = $٣^{س} \times ٣^٢$ = ٩ د (س)

(جـ) د(س) × د (-س) = $٣^{س} \times ٣^{-س}$ = $٣^{س-س}$ = $٣^٠$ = ١

تطبيقات تؤول الى معادلات على الصورة $ٯ^{س} = ب$:

*** دالة النمو الأسى :**

تستخدم الدالة $د(ں) = ٯ(١ + ر)^{ں}$ لتمثيل النمو الأسي بنسبة مئوية ثابتة فى فترات زمنية متساوية حيث ں هى الفترة الزمنية ، ٯ القيمة الابتدائية ، ر النسبة المئوية للنمو فى الفترة الزمنية الواحدة .

*** التضاؤل الأسى :**

تستخدم الدالة $د(ں) = ٯ(١ - ر)^{ں}$ لتمثيل النمو الأسي بنسبة مئوية ثابتة فى فترات زمنية متساوية حيث ں هى الفترة الزمنية ، ٯ القيمة الابتدائية ، ر النسبة المئوية للنمو فى الفترة الزمنية الواحدة .

مثال : يتكاثر النحل فى آحد الخلايا فيزداد بمعدل ٢٥ ٪ كل أسبوع ، فإذا كان عدد النحل فى البداية ٦٠ نحلة . اكتب دالة أسية تمثل عدد النحل بعد ن أسبوع ، ثم قدرعدد النحل بعد ٦ أسابيع.

الحل : $ٯ = ٦٠$ ، $ر = \frac{٢٥}{١٠٠} = ٠.٢٥$ ، الفترة الزمنية $ں = ٦$ أسابيع

دالة النمو الأسي بعد ں أسبوع هى :

$د(ں) = ٯ(١ + ر)^{ں} = ٦٠ \,(١ + ٠.٢٥)^{ں} = ٦٠ \,(١.٢٥)^{ں}$

$د(٦) = ٦٠ \,(١.٢٥)^{٦} \simeq ٢٢٩$ نحلة

عدد النحل بعد ٦ أسابيع = ٢٢٩ نحلة

مثال : اشترى كريم سيارة جديدة بمبلغ ١٢٠٠٠٠ جنية فإذا كان سعر السيارة يتناقص بمعدل ١٢ ٪ كل سنة .

١) اكتب دالة أسية تمثل سعر السيارة بعد ں سنة من شرائها .

٢) قدر لأقرب جنية سعر السيارة بعد مرور ٦ سنوات من شرائها .

الحل: $أ = ١٢٠٠٠٠$ ، $ر = \frac{١٢}{١٠٠} = ٠,١٢$ ، الفترة الزمنية ن = ٦ سنوات

أولًا: دالة التضاؤل الأسى هى: $د(ن) = أ(١ - ر)^{ن}$ وبالتعويض عن قيم أ ، ر فإن:

$د(ن) = ١٢٠٠٠٠ (١ - ٠,١٢)^{ن} = ١٢٠٠٠٠ (٠,٨٨)^{ن}$

ثانيًا: بالتعويض عن ن = ٦ فى دالة النمو الأسى:

$د(٥) = ١٢٠٠٠٠(٠,٨٨)^{٦} = ٥٥٧٢٨,٤٩٠٤١$

سعر السيارة المتوقع بعد مرور ٦ سنوات يقدر بمبلغ ٥٥٧٢٨ جنيه

مثال إذا كان $د(س) = ٢^{س}$ فأثبت أن المقدار $\frac{١}{د(س) + ١} + \frac{١}{د(-س) + ١}$ له قيمة ثابتة مهما كانت قيمة س.
الحل : حاول بنفسك

تمارين على الدالة الأسية و دالة النمو و التضاؤل

(١) أكمل ما يأتى:

(أ) تكون الدالة د حيث $د(س) = أ^{س}$ دالة أسية إذا كانت أ ....، س ....

(ب) الدالة الاسية ر حيث $ر(س) = ٣^{س - ١}$ أساسها هو .... وأسها هو ....

(جـ) الدالة هـ حيث $هـ(س) = (\frac{-١}{٢})^{س+١}$ ليست دالة أسية لأن ....

(د) إحداثيا نقطة تقاطع الدالة الأسية $د(س) = أ^{س}$ مع المستقيم س = ٠ هى النقطة (...... ، ......)

(هـ) معادلة محور التماثل لمنحنى الدالتين د، ر حيث: $د(س) = ٣^{س}$، $ر(س) = (\frac{١}{٣})^{س}$ هو ....

---

(٢) اختر الإجابة الصحيحة من بين الاجابات الآتية:

(أ) تكون الدالة الأسية التى أساسها أ تزايدية إذا كانت

(أ) أ > ٠　　(ب) أ > ١　　(جـ) ٠ < أ < ١　　(د) أ = ١

(ب) تكون الدالة الأسية التى أساسها أ تناقصية إذا كانت :

(أ) أ > ٠　　(ب) ٠ < أ　　(جـ) ٠ < أ < ١　　(د) -١ < أ < ٠

(ج) الدالة الأسية د حيث د(س) = $أ^{س}$ ، أ > ١ يقترب خطها البيانى من:

(أ) محور السينات (الاتجاه الموجب) (ب) محور السينات (الاتجاه السالب)

(جـ) محور الصادات (الاتجاه الموجب) (د) محور الصادات (الاتجاه السالب)

(د) فى الدالة الأسية د حيث د(س) = $أ^{س}$ ، (أ > ١) تكون د(س) > ١ عندما:

(أ) س ∋ ح (ب) س ∋ $ح^{+}$ (جـ) س ∋ $ح^{-}$ (د) س ∋ ص

(هـ) فى الدالة الأسية ر حيث ر(س) = $أ^{س}$ ، (٠ < أ < ١) تكون ٠ < $أ^{س}$ < ١ عندما س ∋

(أ)]٠ ، ∞[(ب)]-∞ ، ٠[(جـ)]١ ، ∞[(د)]-∞ ، ١[

---

(٣) بين أى من الدوال الآتية دالة أسية، ثم اكتب أسها وأساسها:-

(أ) د(س) = ٢$س^{٢}$ (ب) د(س) = $\frac{٢}{٣}(٥)^{س}$ (ج) د(س) = $\frac{١}{س - ١}$

(د) د(س) = ٣$س^{٢}$ - ١ (هـ) د(س) = $(\frac{٢}{٣})^{س-١}$ (و) د(س) = $(-٧)^{س}$

---

(٤) مثِّل الدالة د في كل مما يأتي بيانيًا، ثم أوجد المجال والمدى لكل منها، وبيِّن أى منها تزايدية وأى منها تناقصية:

(أ) د(س) = $٣^{س}$ (ب) د(س) = $(\frac{١}{٢})^{س}$ (ج) د(س) = -٣ $(٢)^{س}$ (د) د(س) = $٢^{س+١}$ + ١

---

(٥) أودع زياد مبلغ ٨٠٠٠٠ جنية فى أحد البنوك بفائدة سنوية ١٠,٥٪، كم يصبح جملة رصيده بعد ١٠ سنوات، علمًا بأن جملة الرصيد تعطى بالعلاقة:

جـ = م$(١ + ر)^{ن}$ حيث م المبلغ، ر النسبة المئوية للفائدة ، ن عدد السنوات

---

(٦) يتناقص عدد الهواتف الأرضية في إحدى المدن نتيجة انتشار الهواتف المحمولة بمعدل ١٠٪، فإذا كان عدد الهواتف فى إحدى السنوات ٥٤٠٠٠ هاتف، فاكتب دالة أسية تمثل عدد هذه الهواتف بعد مرور ن سنة، ثم قدِّر عدد الهواتف بعد مرور ٤ سنوات.

⑦ بلغ عدد الأبقار فى أحد مزارع الماشية ٨٠ بقرة، فإذا كان معدل التكاثر لهذه الابقار يبلغ ١٨٪ سنويًّا تقريبًا، فأوجد عدد الأبقار فى المزرعة بعد ٤ سنوات.

⑧ بلغ تعداد سكان إحدى المحافظات فى جمهورية مصر العربية ٤,٦ مليون نسمة بمتوسط زيادة ٤ ٪ سنويًّا.

أولًا: اكتب دالة أسية تمثل النمو المستقبلى بعد ن سنة.

ثانيًا: قدِّر عدد سكان هذه المحافظة بعد مرور ٥ سنوات من وقت التعداد.

* حل المعادلات الأسية *

قواعد هامة :

١- إذا كان : أ^م = أ^ن فإن : م = ن حيث : أ ∈ ح - {٠ ، ١ ، -١}

مثلا : إذا كان ٣^(س+٤) = ٣^٣ فإن س + ٤ = ٣ ∴ س = ٣ - ٤ = -١

٢- إذا كان : أ^م = ب^م فإن :

*** م = ٠ حيث أ ≠ ٠ ، ب ≠ ٠ ، أ ≠ ± ب**

مثلا : ٧^(س-٤) = ٥^(س-٤) فإن : س - ٤ = ٠ ∴ س = ٤

*** أ = ب إذا كان م عددا فرديا ، أ ≠ ٠ ، ب ≠ ٠**

مثلا : إذا كان س^٣ = ١/٨ = (١/٢)^٣ ∴ س = ١/٢

*** | أ | = | ب | إذا كان م عددا زوجيا ، أ ≠ ٠ ، ب ≠ ٠**

مثلا : س^٢ = ١/٤ = (١/٢)^٢ ∴ س = ± ١/٢

، ص^{٤} = ٨١ = (٣)^{٤} = (- ٣)^{٤} ∴ ص = ± ٣

٣- إذا كان : $أ^{م}$ = ١ فإن : م = ٠ حيث أ ≠ ٠ ، أ ≠ ± ١

مثلا : إذا كان $(\sqrt{٣})^{س - ٢}$ = ١ ∴ س – ٢ = ٠ ∴ س = ٢

مثال : أوجد مجموعة الحل للمعادلات الآتية في ح (حل المعادلات الاتية أو أوجد قيمة س) :

(١) $٢^{س+١}$ = ٣٢ (٢) $٢^{س} \times ٣^{-س}$ = ١ (٣) $٢^{س+١} - ٢^{س}$ = ٢

(٤) $(\sqrt{٥})^{٣س-١}$ = ٥ (٥) $٧^{س-٩} = ٥^{س-٩}$ (٦) $٢٥^{س} - ٦ \times ٥^{س} + ٥ = ٠$

الحل : (١) $٢^{س+١}$ = ٣٢ ∴ $٢^{س+١} = ٢^{٦}$

∵ الأساس = الأساس ∴ الأس = الأس ∴ س + ١ = ٦ ∴ س = ٥

(٢) $٢^{س} \times ٣^{-س}$ = ١ ← $\frac{٢^{س}}{٣^{س}}$ = ١ ← $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{س}$ = ١ = $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{صفر}$

(٣) $٢^{س+١} - ٢^{س}$ = ٢ ← $٢^{س}$ (٢ - ١) = ٢ ← $٢^{س} \times ١$ = ٢

$٢^{س}$ = ٢ ∵ الأساس = الأساس ∴ الأس = الأس ∴ س = ١

(٤) $(\sqrt{٥})^{٣س-١}$ = ٥ ← $(\sqrt{٥})^{٣س-١} = (\sqrt{٥})^{٢}$

∵ الأساس = الأساس ∴ الأس = الأس ∴ ٣س - ١ = ٢ ∴ س = ١

(٥) $٧^{س-٩} = ٥^{س-٩}$ ← الأساس ≠ الأساس ∴ الأس = صفر

∴ س - ٩ = ٠ ∴ س = ٩

(٦) $٢٥^{س} - ٦ \times ٥^{س} + ٥ = ٠$ بوضع $٥^{س}$ = ص

$(٥^{س})^{٢} - ٦ \times ٥^{س} + ٥ = ٠$ ∴ $ص^{٢}$ - ٦ ص + ٥ = ٠

(ص ـ ١)(ص ـ ٥) = ٠ ∴ ص = ١ ، ص = ٥

∴ ٥ ^س^ = ١ ⟵ ٥ ^س^ = ٥ ^صفر^ ⟵ س = صفر

أ، ٥ ^س^ = ٥ ⟵ س = ١

مثال : إذا كانت د(س) = ٣ ^س^ حل المعادلة د (س +١) + د (س – ١) = ٢٧٠

الحل :

∵ د (س +١) + د (س – ١) = ٢٧٠ ∴ ٣ ^س+١^ + ٣ ^س-١^ = ٢٧٠

∴ ٣ ^س^ (٣ + ٣ ^-١^) = ٢٧٠ ∴ ٣ ^س^ (٣ + $\frac{١}{٣}$) = ٢٧٠

∴ ٣ ^س^ × $\frac{١٠}{٣}$ = ٢٧٠ ∴ ٣ ^س^ = ٢٧٠ × $\frac{٣}{١٠}$ = ٨١ = ٣ ^٤^

∵ الاساس = الاساس ∴ الأس = الأس ∴ س = ٤

حل آخر : ٣ ^س+١^ + ٣ ^س-١^ = ٢٧٠ بفرض ٣ ^س^ = ص

٣ ^س^ × ٣ + ٣ ^س^ × ٣ ^-١^ = ٢٧٠ ∴ ص × ٣ + ص × ٣ ^-١^ = ٢٧٠

∴ ص (٣ + $\frac{١}{٣}$) = ٢٧٠ ∴ ص × $\frac{١٠}{٣}$ = ٢٧٠

∴ ص = ٨١ و بالتعويض ∴ ٣ ^س^ = ٣ ^٤^ ∴ س = ٤

مثال : إذا كان د(س) = ٣ ^س^ إثبت أن : $\frac{د(س+١)}{د(س-١)}$ - $\frac{د(س-١)}{د(س+١)}$ = $\frac{٨٠}{٩}$

الحل :

الايمن = $\frac{٣^{س+١}}{٣^{س-١}}$ - $\frac{٣^{س-١}}{٣^{س-١}}$ = ٣ ^س+١- س+١^ _ ٣ ^س-١-س-١^

= ٣ ^٢^ _ ٣ ^-٢^ = ٩ - $\frac{١}{٩}$ = $\frac{٨٠}{٩}$

مثال : إذا كانت د~١~(س) = ٩ ^س^ ، د~٢~ (س) = ٢٧ ^س^

حل المعادلة : د~١~ (٣ س) + د~٢~ (٢س – ١) = ٢٥٢

الحل :

∴ $٩^{٣س} + ٢٧^{٢س - ١} = ٢٥٢$ ∴ $٣^{٦س} + ٣^{٦س - ٣} = ٢٥٢$

∴ $٣^{٦س - ٣}(٣^{٣} + ١) = ٢٥٢$ ∴ $٣^{٦س - ٣} \times ٢٨ = ٢٥٢$

∴ $٣^{٦س - ٣} = ٩$ ∴ $٣^{٦س - ٣} = ٣^{٢}$ ∴ $٦س - ٣ = ٢$ ∴ $٦س = ٥$

م . ح = $\{\frac{٥}{٦}\}$

مثال : إذا كانت د(س) = $٣^{س}$

(أ) أثبت أن د(س + ٢) × د(س - ٢) = د(٢س)

(ب) إذا كان د(س + ١) - د(س - ١) = ٧٢ أوجد قيمة س

الحل : (أ) **الطرف الأيمن** = د(س + ٢) × د(س - ٢) = $٣^{س+٢} \times ٣^{س-٢}$

= $٣^{س+٢+س-٢}$ = $٣^{٢س}$ = د(٢س) = **الطرف الأيسر**

(ب) ∵ د(س + ١) - د(س - ١) = ٧٢ ∴ $٣^{س+١} - ٣^{س-١} = ٧٢$

∴ $٣^{س} \times ٣ - \frac{٣^{س}}{٣} = ٧٢$ ∴ $٣^{س}(٣ - \frac{١}{٣}) = ٧٢$

∴ $٣^{س} \times \frac{٨}{٣} = ٧٢$ ∴ $٣^{س} = ٧٢ \times \frac{٣}{٨} = ٢٧$

∴ $٣^{س} = ٣^{٣}$ ومنها س = ٣

مثال : إذا كان $د_{١}$(س) = $٨^{س}$ ، $د_{٢}$(س) = $٤^{س}$

حل المعادلة $د_{١}$(٢ س) + $د_{٢}$(٣ س – ١) = ٨٠

الحل : $د_{١}$(س) = $(٢^{٣})^{س} = ٢^{٣س}$ ، $د_{٢}$(س) = $(٢^{٢})^{س} = ٢^{٢س}$

المعادلة : $د_{١}$(٢ س) + $د_{٢}$(٣ س – ١) = ٨٠

∴ $٢^{٣ \times ٢س} + ٢^{٢(٣س - ١)} = ٨٠$ ← $٢^{٦س} + ٢^{٦س - ٢} = ٨٠$

← $٢^{٦س}(١ + ٢^{-٢}) = ٨٠$ ← $٢^{٦س} \times \frac{٥}{٤} = ٨٠$

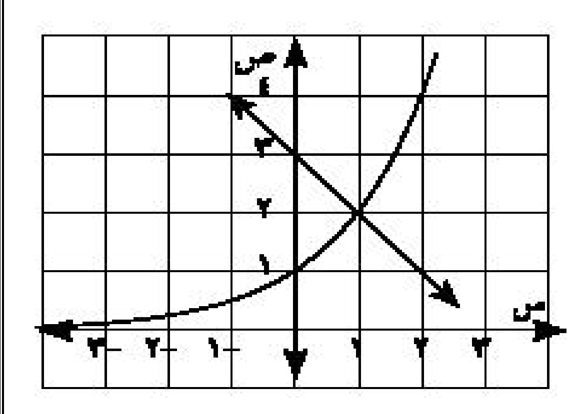
← $٢^{٦س} = ٨٠ \times \frac{٤}{٥}$ ∴ $٢^{٦س} = ٦٤ = ٢^{٦}$ ∴ ٦ س = ٦ ∴ س = ١

* **حل المعادلات بيانيا :**

نرسم منحنيي الدالتين $د_١$(س) دالة أسية ، $د_٢$(س) دالة خطية مثلا ثم نوجد نقطة تقاطع منحنيي الدالتين و لتكن (س ، ص) فإن مجموعة الحل = الاحداثى السينى لنقطة التقاطع

مثال : ارسم فى شكل واحد منحنيى الدالتين $د_١$(س) = $٢^{س}$ ، $د_٢$(س) = ٣ – س

و من الرسم أوجد مجموعة الحل للمعادلة $٢^{س}$ = ٣ – س



الحل : نرسم منحنيى الدالتين $د_١$ ، $د_٢$ ومن الرسم نجد :

نقطة تقاطع المنحنيين (١ ، ٢)

∴ م . ح = { ١ }

تمارين على حل المعادلات و تطبيقاتها

(١) اختر الإجابة الصحيحة:

(أ) إذا كان $٢^{س+١} = ٨$، فإن س = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٣

(ب) إذا كان $٥^{س-١} = ٤^{س-١}$، فإن س = ...

(أ) ٥ (ب) ١ (جـ) -١ (د) صفر

(جـ) $\left(\frac{١}{٢}\right)^{أ^٢-أ-٢} = ١$ حيث أ > صفر، فإن أ = ...

(أ) ١ (ب) -٣ (جـ) ٢ (د) ٣

(٢) أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

(أ) $٢^{س+١} = ٤$ (ب) $٣^{س-١} = \frac{١}{٩}$ (جـ) $٧^{س-٢} = ١$

(د) $٥^{س+٣} = ٤^{س+٣}$ (هـ) $(٣\sqrt{٣})^{|س|} = ٢٧$ (و) $٣^{س+٢} - ٣^{س+٢} = ١٦٢$

(ز) $٥^{٢س} + ٢٥ = ٢٦ \times ٥^{س}$ (ح) $٢^{س} + ٢^{٥-س} = ١٢$ (ط) $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س+١} + \left(\frac{١}{٢}\right)^{س+٣} + \left(\frac{١}{٢}\right)^{س+٥} = ٨٤$

(٣) أوجد مجموعة حل المعادلتين:

$٣^{س} \times ٥^{ص} = ٧٥$ ، $٣^{ص} \times ٥^{س} = ٤٥$

(٤) إذا كانت $د_١(س) = ٣^{س}$ ، $د_٢(س) = ٩^{س}$ فأوجد قيمة س التي تحقق $د_١(٢س-١) + د_٢(س+١) = ٧٥٦$

(٥) إذا كانت $د(س) = ٧^{س+١}$ فأوجد قيمة س التي تحقق $د(٢س - ١) + د(س - ٢) = ٥٠$

(٦) أوجد بيانيًا مجموعة حل المعادلة $٣^{س-٢} = ٣ - س$

(٧) إذا كان $س^٣ = ص^٢$ وكان $س^{ن+١} = ص^{ن-١}$ فما قيمة ن ؟

---

* الدالة العكسية :

مثال توضيحى : الشكل المقابل يمثل علاقة من س الى ص حيث أ ع ب تعنى (أ أبو ب)

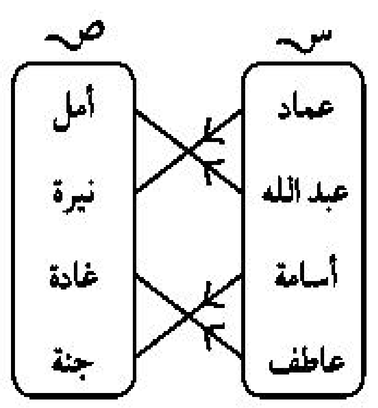
لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص هذه العلاقة دالة أحادية

بيان$ع_١$ = { (عماد ، نيرة) ، (عبد الله ، أمل) ،
(أسامة ، جنة) ، (عاطف ، غادة) }

وإذا كانت العلاقة من ص الى س تعنى (ب إبنة أ) دالة أحادية

بيان$ع_٢$ = { (نيرة ، عماد) ، (أمل ، عبد الله)
، (جنة ، أسامة) ، (غادة ، عاطف) }

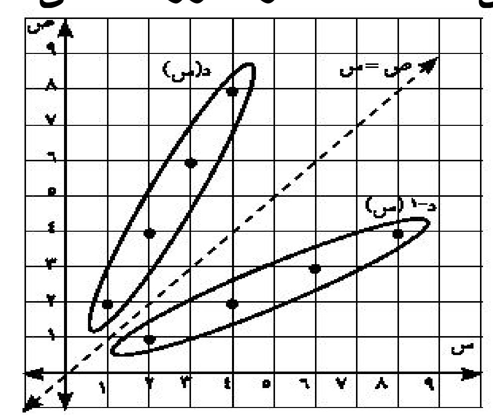
نلاحظ أن : الدالة $ع_١$ دالة عكسية للدالة $ع_٢$

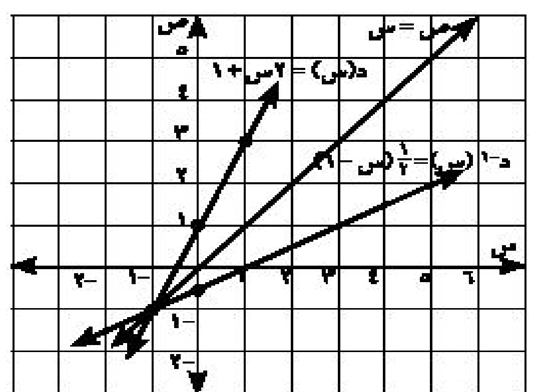


> **الدالة العكسية :**
>
> **إذا كانت الدالة د أحادية من مجموعة س إلى مجموعة ص**
>
> **فإن : الدالة $د^{-١}$ من ص الى س تسمى دالة عكسية للدالة د**
>
> **إذا كان لكل (س ، ص) ∈ د فإن (ص ، س) ∈ $د^{-١}$**

ملاحظات هامة :

١) منحنى الدالة د$^{-١}$ هو صورة منحنى الدالة د بالانعكاس فى المستقيم ص = س



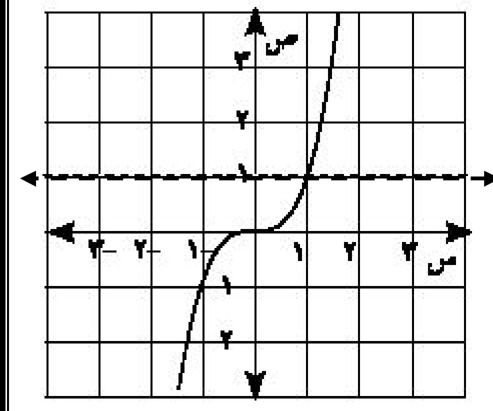


٢) لكى يكون للدالة د دالة عكسية يجب أن تكون د دالة أحادية

أى يحقق منحنى د اختبار الخط الأفقى

(إذا قطع أى مستقيم أفقى المنحنى فى نقطة واحدة

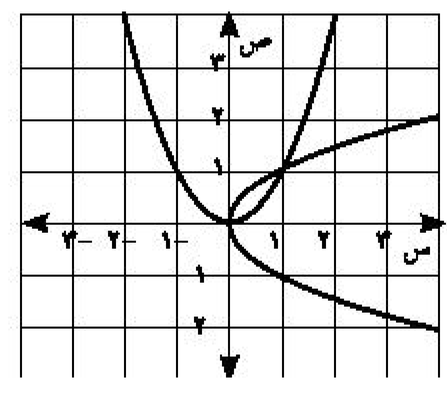
فإن المنحنى يمثل دالة أحادية)



٣) إذا كانت الدالة ليست أحادية (لا تحقق اختبار الخط الأفقى)

فإن معكوسها لا يمثل دالة . مثل ص = س^{٢} (ليست أحادية)

معكوسها | ص | = $\sqrt{س}$ لا يمثل دالة



٤) لإيجاد الدالة العكسية أولا نقوم بتبديل المتغيرات ثم نوجد ص بدلالة س .

مثلا : إذا كان ص = ٣ س − ١ فإن س = ٣ ص − ١ ∴ ٣ ص = س + ١

∴ ص = $\frac{١}{٣}$(س + ١) ∴ د$^{-١}$(س) = $\frac{١}{٣}$ (س + ١)

، إذا كان ص = س^{٣} فإن س = ص^{٣} ∴ د$^{-١}$ (س) = س$^{\frac{١}{٣}}$

من خواص الدالة العكسية :

١) يقال أن د(س) ، ر(س) دالة عكسية للأخرى
إذا كان (د ٥ ر) (س) = س ، (ر ٥ د)(س) = س

٢) مجال الدالة د(س) = مدى الدالة العكسية د$^{-1}$(س)
مدى الدالة د(س) = مجال الدالة العكسية د$^{-1}$(س)

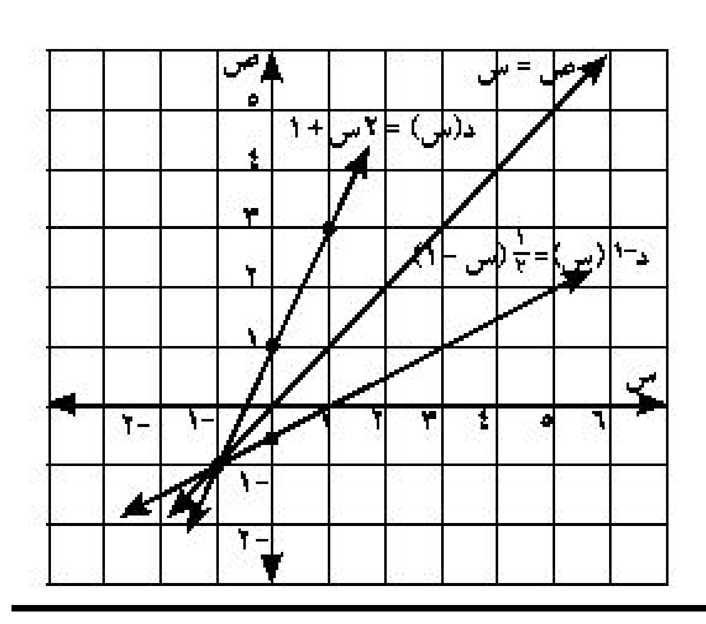
مجال د(س)　س　مدى د(س)　د(س)　مدى د$^{-1}$ (س)　مجال د$^{-1}$ (س)

مثال : أوجد الدالة العكسية للدالة د حيث د(س) = ٢ س + ١ و مثل الدالة و معكوسها بيانيا فى شكل واحد .

الحل : ∵ ص = ٢ س + ١　∴ س = ٢ ص + ١　∴ ٢ ص = س – ١

∴ ص = $\frac{1}{2}$ (س – ١)　∴ د$^{-1}$(س) = $\frac{1}{2}$ (س – ١)

س	ـ ١	٠	١
د(س)	ـ ١	١	٣
د$^{-1}$(س)	ـ ١	ـ ٠.٥	٠



و يلاحظ أن :

الدالة د و الدالة العكسية د$^{-1}$ منحناهما متماثلان بالنسبة للمستقيم ص = س

مثال : إذا كانت د دالة بحيث د(س) = ٣ + $\sqrt{\text{س} - 1}$ فأوجد :

أ) مجال د(س) و مدى د(س)　　ب) د$^{-1}$(س) و عين مجالها و مداها

جـ) مستخدما أحد البرامج الرسومية ارسم الشكل البيانى لكل من د(س) ، د$^{-1}$(س)

الحل: (أ) د(س) معرفة لجميع قيم س – ١ ⩾ ٠　أى س ⩾ ١

∴ مجال د(س) = [١ ، ∞ [

∵ $\sqrt{\text{س} - 1}$ ⩾ ٠ لجميع قيم س الواقعة فى مجال الدالة

∴ $\sqrt{س - ١} + ٣ \geqslant ٣$ ⟸ د(س) $\geqslant ٣$ ∴ مدى د(س) = [٣ ، ∞ [

(ب) ∵ ص = $\sqrt{س - ١} + ٣$ باستبدال المتغيرات س ، ص

∴ س = $\sqrt{ص - ١} + ٣$ ∴ س − ٣ = $\sqrt{ص - ١}$ بتربيع الطرفين

∴ $(س - ٣)^{٢}$ = ص − ١ ∴ ص = $(س - ٣)^{٢} + ١$

∴ $د^{-١}(س) = (س - ٣)^{٢} + ١$

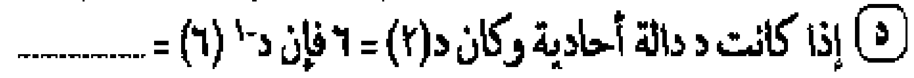
تمارين على الدالة العكسية

① أكمل:

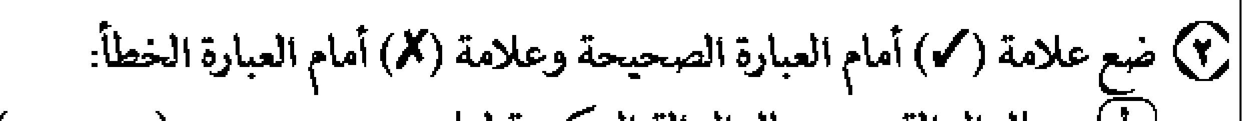

(أ) إذا كانت الدالة د = {(١، ٤)، (٢، -٢)، (٣، ١)، (٤، ٠)} فإن $د^{-١}$ = ...

(ب) الشكل المقابل يمثل دالة د : س ⟵ ص فإن $د^{-١}$ (٢) = ...


(جـ) صورة النقطة (٢، ١) بالانعكاس في المستقيم ص = س هي النقطة ....


(د) إذا كانت د دالة أحادية وكان د(٢) = ٦ فإن $د^{-١}$ (٦) = ...

(هـ) إذا كان د : س ⟵ ٤س فإن $د^{-١}$: س ⟵ ....


② ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (✗) أمام العبارة الخطأ:

(أ) مجال الدالة هو مجال الدالة العكسية لها. (..........)

(ب) الدالة المتزايدة على مجالها يكون دائمًا لها دالة عكسية. (..........)

(جـ) الدالة الزوجية يكون لها دائمًا دالة عكسية. (..........)

(د) الدالة الفردية يكون لها دائمًا دالة عكسية. (..........)

③ أوجد الدالة العكسية إذا كان:

(أ) د(س) = $\frac{١}{٢}$ س + ٤ (ب) د (س) = ٤س

(جـ) د(س) = ٥ + $\frac{٤}{س}$ (د) د (س) = $\frac{٣}{س}$

(هـ) د(س) = ٨ $س^{٣}$ - ١ (و) د (س) = $\sqrt[٣]{٤ - س}$

(ز) د(س) = ٢ + $\sqrt{٣ - س}$　　　(ح) د (س) = س^{٢} حيث س ⩽ صفر

(ط) د(س) = (س - ١)^{٢} + ٢　　حيث س ⩾ ١

(ى) د(س) = س^{٢} + ٨ س + ٧　　حيث س ⩾ -٤

(ك) د(س) = $\sqrt{٩ - س^{٢}}$　　حيث -٣ ⩽ س ⩽ ٠

(ل) د(س) = $\sqrt{٩ - س^{٢}}$　　حيث ٠ ⩽ س ⩽ ٣

(م) د = {(١ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٤)}

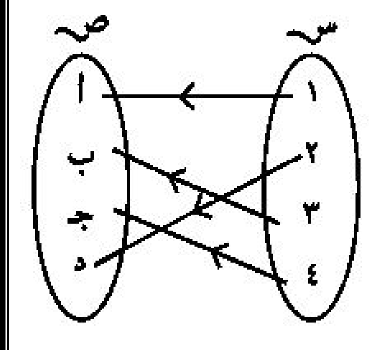
(و)

س	-٢	١	٢	٥
د(س)	٧	٤	١	-١

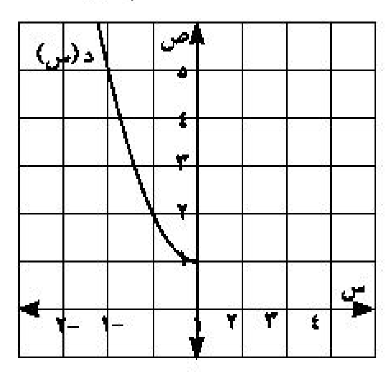


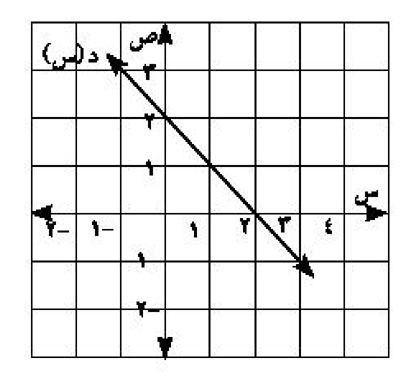
(٤) (أ) إذا كانت د(س) = ٥س. أوجد د$^{-١}$(س) ومثلهما بيانيًّا.

(ب) الشكل المقابل يمثل دالة د من سـ إلى صـ فأوجد قيمة د$^{-١}$ (ب) + ٢ د$^{-١}$(جـ).



(٥) في كل من الأشكال الآتية. ارسم في نفس الشكل منحنى الدالة العكسية د$^{-١}$(س)





(٦) في كل مما يأتى عين المجال الذى يكون فيه للدالة د دالة عكسية:

(أ) د(س) = س^{٢}　　(ب) د (س) = س^{٣}　　(جـ) د(س) = $\frac{١}{٢}$ س

*** الدالة اللوغاريتمية و تمثيلها بيانيا :**

تعريف : إذا كان : م ∈ ح+ − {١} ، س ∈ ح ، ص ∈ ح+

فإن :الدالة اللوغاريتمية ص = لـــوم س دالة عكسية للدالة الأسية ص = م^س

مثلا : ٨ = ٢^٣ ↔ لـــو٢ ٨ = ٣ ، لـو٢ ٣٢ = ٥ ↔ ٣٢ = ٢^٥

، ٢٤٣ = ٣^٥ ↔ لـــو٣ ٢٤٣ = ٥

ملاحظات:

*** لـــوم س تقرأ لوغاريتم س لأساس م**

*** الدالة اللوغاريتمية هى الدالة العكسية للدالة الآسية**

*** لا معنى للحديث عن لوغاريتم عدد غير موجب فمثلا : لو٤ − ٣ ، لوم صفر لا معنى له**

*** الأساس م يجب أن يكون عدداً موجباً يختلف عن الواحد الصحيح**

فمثلا : لو−٢ ٨ ، لوصفر ٧ لا معنى له

*** اللوغاريتمات المعتادة :**

هى اللوغاريتمات التى أساسها = ١٠ ولا يكتب [وقد أتفق على حذف هذا الأساس]

فمثلا : لو ٣ تعنى لو١٠ ٣

وعلى ذلك يكون :

لو ١٠ = ١ ، لو ١٠٠ = لو ١٠^٢ = ٢ ، لو ١٠٠٠ = لو ١٠^٣ =٣ وهكذا

، لو ٠.١ = − ١ ، لو ٠.٠١ = − ٢ ، لو ٠.٠٠١ = - ٣ وهكذا

التحويل من الدالة الأسية الى اللوغاريتمية العكس :

م^ب = جـ فإن ب = لوم جـ

مثال : عبِّر عن كل مما يأتي بصورة لوغاريتمية مكافئة

(أ) ٢^٧ = ١٢٨　(ب) $(\sqrt{2})^{10}$ = ٣٢　(جـ) $(\frac{٢}{٣})^{-٢} = \frac{٩}{٤}$

الحل : (أ) ∵ ٢^٧ = ١٢٨ ∴ لـو٢ ١٢٨ = ٧

(ب) ∵ $(\sqrt{2})^{10}$ = ٣٢ ∴ لـو√٢ ٣٢ = ١٠

(جـ) ∵ $(\frac{٢}{٣})^{-٢} = \frac{٩}{٤}$ ∴ لـو$_{\frac{٢}{٣}}$ $\frac{٩}{٤}$ = - ٢

التحويل من الدالة اللوغاريتمية الى الدالة الأسية :

مثال : حول كل مما يأتى إلى الصورة الأسية :

(أ) $لو_{\sqrt{٢}}\ ٣٢ = ١٠$ (ب) $لو_{٣} \frac{١}{٢٤٣} = -٥$ (جـ) $لو_{\frac{١}{٢}}\ ١ = صفر$

(هـ) $لو_{٧}\ ٧ = ١$ (د) $لو \frac{١}{١٠٠٠} = -٣$ (و) $لو_{٣}\ ٩ = ٢$

الحل : (أ) $٣٢ = (\sqrt{٢})^{١٠}$ (ب) $\frac{١}{٢٤٣} = ٣^{-٥}$ (جـ) $١ = (\frac{١}{٢})^{صفر}$

(هـ) $٧ = ٧^{١}$ (د) $\frac{١}{١٠٠٠} = ١٠^{-٣}$ (و) $٩ = ٣^{٢}$

*** إيجاد قيمة لوغاريتم عدد لأساس معلوم :**

مثال: اوجد قيمة كل من :

١) $لو_{٢}\ ٦٤$ ٢) $لو_{٣}\ ٢٤٣$ ٣) $لو_{٥}\ ١٢٥$ ٤) $لو_{٧}\ ٧$

الحل : ١) نفرض أن $س = لو_{٢}\ ٦٤$ $\therefore ٢^{س} = ٦٤ = ٢^{٦}$ $\therefore س = ٦$

$\therefore لو_{٢}\ ٦٤ = ٦$

٢) نفرض أن $س = لو_{٣}\ ٢٤٣$ $\therefore ٣^{س} = ٢٤٣ = ٣^{٥}$ $\therefore س = ٥$

$\therefore لو_{٣}\ ٢٤٣ = ٥$

٣) نفرض أن $س = لو_{٥}\ ١٢٥$ $\therefore ٥^{س} = ١٢٥ = ٥^{٣}$ $\therefore س = ٣$

$\therefore لو_{٥}\ ١٢٥ = ٣$

٤) نفرض أن $س = لو_{٧}\ ٧$ $\therefore ٧^{س} = ٧ = ٧^{١}$ $\therefore س = ١$

$\therefore لو_{٧}\ ٧ = ١$

مثال : أوجد قيمة كل مما يأتى : (أ) لو ٠.٠٠١ (ب) $لو_{٣} \sqrt[٤]{٢٧}$

الحل :

(أ) بوضع ص = لو ٠,٠٠١

بالتحويل إلى الصورة الأسية:

$١٠^{ص} = ٠,٠٠١$

$١٠^{ص} = (\frac{١}{١٠})^{٣}$ وضع العدد بالصورة الأسية

$١٠^{ص} = (١٠)^{-٣}$ من خواص الأسس

ص = -٣ لذلك فإن لو ٠,٠٠١ = -٣

(ب) بوضع $ص = لو_{٣} \sqrt[٤]{٢٧}$

بالتحويل إلى الصورة الأسية

$٣^{ص} = ٣^{\frac{٣}{٤}}$ من خواص الأسس

$ص = \frac{٣}{٤}$

لذا فإن $لو_{٣} \sqrt[٤]{٢٧} = \frac{٣}{٤}$

* حل المعادلات اللوغاريتمية :

مثال : أوجد فى ح مجموعة كل من المعادلات الآتية :

(١) لو$_{٨١}$ س = $\frac{٣}{٤}$ (٢) لو $_{س}$ ٥س = ٢ (٣) لو$_{س}$ (س+ ٢) = ٢ (٤) لو$_{٣}$ (س - ١)=١

الحل :

(١) لو$_{٨١}$ س = $\frac{٣}{٤}$

∴ س = $(٨١)^{\frac{٣}{٤}}$ = $(٣^{٤})^{\frac{٣}{٤}}$ = $٣^{٣}$

∴ س = ٢٧   ∴ م . ح = {٢٧}

---

(٢) لو $_{س}$ ٥ س = ٢

∴ ٥ س = س^{٢}

∴ س^{٢} ـ ٥ س = ٠

∴ س (س ـ ٥) = ٠

∴ س = ٠ ∌ مجالها ، س = ٥ ∋ مجالها

∴ م . ح = { ٥ }

---

(٣) ∵ لو$_{س}$ (س + ٢) = ٢

∴ س + ٢ = س^{٢}

∴ س^{٢} ـ س ـ ٢ = ٠

∴ (س – ٢)(س + ١) = ٠

∴ س = ٢ ، س = ـ ١ ∌ المجال

∴ م . ح = { ٢ }

---

(٤) ∵ لو$_{٣}$ (س - ١) = ١

∴ س – ١ = ٣ ^{١} ∴ س = ٣ + ١ = ٤

∴ م . ح = { ٤ }

مثال : اوجد قيمة س إذا كان : لـــــو $_{٢}$ لـــــو$_{٣}$ (س^{٢} ـ ٧ س + ١٥) = ١

الحل :

لـــــو $_{٢}$ لـــــو$_{٣}$ (س^{٢} ـ ٧ س + ١٥) = ١

∵ س^{٢} ـ ٧ س + ١٥ > ٠ لجميع قيم س ∋ ح لان المميز ب^{٢} ـ ٤ أ جـ = ١٩ > ٠

∴ لـــو $_{٣}$ (س^{٢} ـ ٧ س + ١٥) = ٢ ^{١} = ٢ ∴ س^{٢} ـ ٧ س + ١٥ = ٣ ^{٢} = ٩

∴ س^{٢} ـ ٧ س + ٦ = ٠   ∴ (س – ١)(س – ٦) = ٠

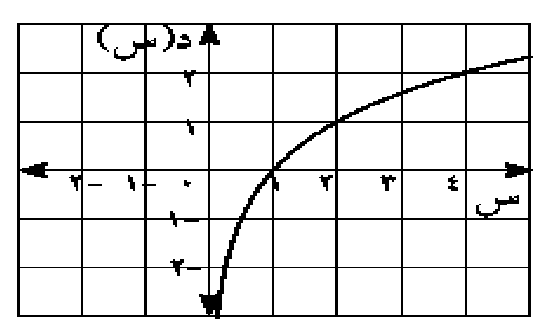
∴ س = ١ ، س = ٦



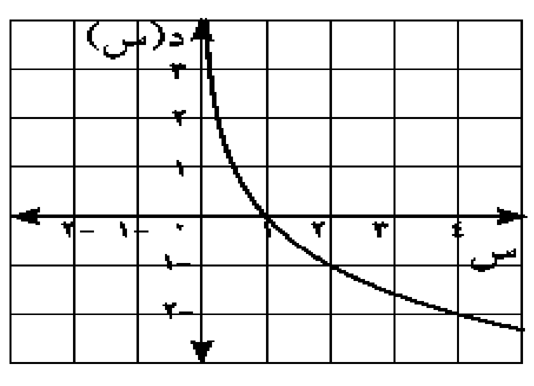
التمثيل البياني للدالة اللوغاريتمية:

تمثل الدالة د حيث د(س) = لو$_{أ}$ س حيث أ ≠ ١ بيانيًا كما في الأشكال الآتية:

عندما أ > ١



عندما ٠ < أ < ١



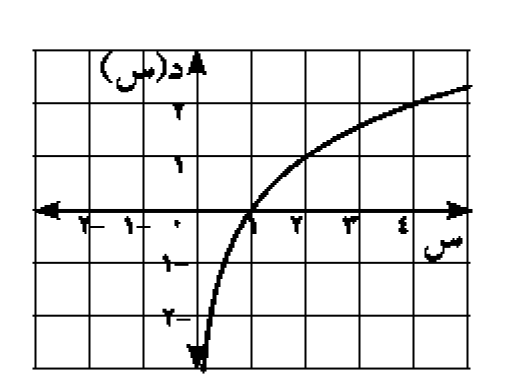
	عندما أ > ١	عندما ٠ < أ < ١
المجال:	ح$_+$	ح$_+$
المدى:	ح	ح
التقاطع مع محور س:	(١، ٠)	(١، ٠)
التزايد والتناقص:	تزايدية ح$_+$	تناقصية ح$_+$

مثل الدوال الآتية بيانيًا: (أ) د(س) =لو$_{٢}$ س (ب) د(س) = لو$_{\frac{١}{٢}}$ س

الحل :

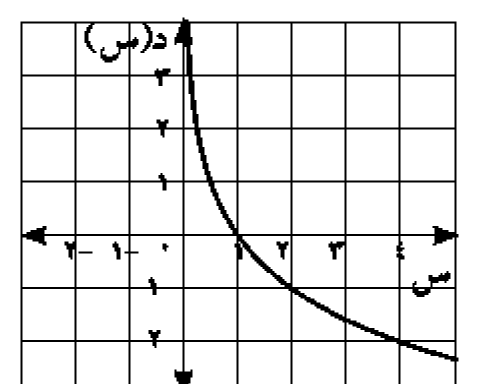
(أ) لاحظ أن: الأساس ٢ > ١

س	٢	١	٤
د(س)	١	٠	٢



(ب) لاحظ أن: الأساس : ٠ < $\frac{١}{٢}$ < ١

س	٢	١	٤
د(س)	١-	٠	٢-



إستخدام الآلة الحاسبة :

لإيجاد اللوغاريتم المعتاد لأى عدد حقيقى موجب نستخدم **log**
، و لإيجاد العدد الحقيقى الموجب إذا علم لوغاريتمه المعتاد نستخدم (**shift log (10^x)**

مثال : بإستخدام الحاسبة أوجد لو ٥٧.٠٦
الحل:
خطوات الآلة : log 5 7 . 0 6 =
نجد أن : لو ٥٧.٠٦ = ١.٧٥٦٣

مثال : أوجد قيمة س إذا كان : لو س = – ٠.٠٠٧٥
الحل:
خطوات الآلة : shift log (10^x) – 0 . 0 0 7 5 =
نجد أن : س = ٠.٩٨٢٩

تمارين على الدالة اللوغاريتمية و تمثيلها

(١) عبِّر عن كل مما يأتي بصورة لوغاريتمية مكافئة:

(أ) $٣^{-٢} = \frac{١}{٩}$　(ب) $(\frac{٢}{٥})^٤ = \frac{١٦}{٦٢٥}$　(جـ) $٥^{صفر} = ١$　(د) $(\sqrt{٢})^٤ = ٤$

(٢) عبِّر عن كل مما يأتي بصورة أسية مكافئة:

(أ) لو ١٠٠ = ٢　(ب) $لو_{٢}\ ٤\sqrt{٢} = \frac{٥}{٢}$　(جـ) $لو_{٧}\ ١ = صفر$　(د) $لو_{\sqrt{١١}}\ ١٢١ = ٤$

(٣) عيِّن مجال الدالة د في كل مما يأتي:

(أ) $د(س) = لو_{٢}\ (٢س+١)$　(ب) د(س) = ٢لوس　(جـ) $د(س) = لو_{(٥-س)}\ (س-٣)$

(٤) بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة كل من:

(أ) $لو_{٢}\ ١٦$　(ب) $لو_{\sqrt{٥}}\ ٥$　(جـ) $لو_{٨}\ ١$　(د) $لو_{٣}\ ٣\sqrt{٣}$

⑤ أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

(أ) لو$_{٢}$ ٢٧ = س + ٢ (ب) لو$_{س}$ (٢س + ٣) = ٢ (جـ) لو (٢س + ١) = صفر

(د) لو$_{٢}$ (لو$_{٣}$ س) = ١ (هـ) لو$_{٤}$ [١٣ + لو$_{٢}$ (س-١)] = ٢ (و) لو$_{٢}$ (٤^{س} - ٢) = س

⑥ مثل بيانيًا كل من الدوال الآتية:

(أ) د(س) = لو$_{٢}$ س

س	٩	٣	١	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٩}$
د(س)					

(ب) د(س) = لو$_{\frac{١}{٢}}$ (س+١)

س	$-\frac{٧}{٨}$	$-\frac{١}{٢}$	صفر	١	٣	٧
د(س)						

⑦ ارسم في شكل واحد منحنى كل من الدالتين ر، د حيث ر(س) = لو$_{٢}$ س، د(س) = ٦ - س، ثم استخدم ذلك في إيجاد مجموعة حل المعادلة لو$_{٢}$ س = ٦-س.

⑧ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه:

(أ) إذا كان لو$_{٢}$ س = ٢ فإن س = ______ (٩، ٨، ٣، ٥)

(ب) إذا كان لو$_{أ}$ ١٦ = ٤ فإن أ ∈ ______ ({١٦}، {٢}، {٢، -٢}، {١})

(جـ) لو$_{٥}$ ١٢٥ = ______ ($\sqrt{٣}$، ٣، ٥، ١٢٥)

(د) مجال الدالة د حيث د(س) = لو$_{(١-س)}$ ٣ هو ______ (]-∞، ٠[∪]٠، ١[،]-∞، ١[،]١، ∞[،]-١، ١[)

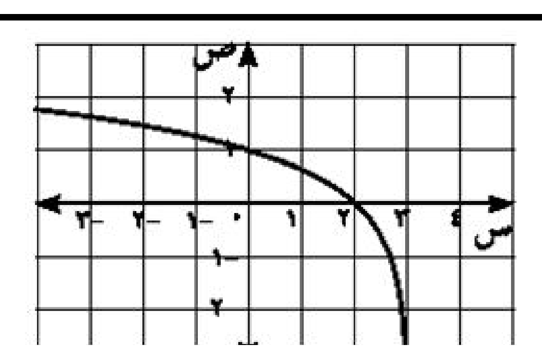
(هـ) لو ١٠٠ = ______ (١، ٢، ٣، -١)

(و) إذا كان منحنى الدالة د حيث د(س) = لو$_{أ}$ س يمر بالنقطة (٨، ٣): فإن د(٤) = ... (١، ٢، $\frac{١}{٤}$، -٢)

(ز) الشكل المقابل يمثل الدالة ....

(ص = $٣^{س-١}$ ، ص= $٣^{س+١}$ ،

ص= لو$_٢$ (٢-س) ، ص= لو$_٢$ (٣-س)



بعض خواص اللوغاريتمات

إذا كان س ، ص ∈ ح$_+$ ، م ∈ ح$_+$ − {١} يكون :

١ – خاصية الضرب فى اللوغاريتمات :

لـــو$_م$ س + لـــو$_م$ ص = لـــو$_م$ س × ص

فمثلا : لـــو$_م$ ٣ + لـــو$_م$ ٥ = لـــو$_م$ (٣ × ٥) = لـــو$_م$ ١٥

، لـــو$_جـ$ ٥٦ = لـــو$_جـ$ (٧ × ٨) = لـــو$_جـ$ ٧ + لـــو$_جـ$ ٨

، لـــو$_م$ ٤٢ = لـــو$_م$ (٢ × ٣ × ٧) ≠ لـــو$_م$ ٢ × لـــو$_م$ ٣ × لـــو$_م$ ٧

ملاحظة هامة :

لـــو$_م$ (س + ص) ≠ لـــو$_م$ س + لـــو$_م$ ص

، لـــو$_م$ (س × ص) ≠ لـــو$_م$ س × لـــو$_م$ ص

٢ – خاصية القسمة فى اللوغاريتمات :

لـــو$_م$ س – لـــو$_م$ ص = لـــو$_م$ $\frac{س}{ص}$

فمثلا : لـــو$_م$ ٥ – لـــو$_م$ ٧ = لـــو$_م$ $\frac{٥}{٧}$ ، لـــو$_ب$ $\frac{٣}{٧}$ = لـــو$_ب$ ٣ – لـــو$_ب$ ٧

ملاحظة هامة : لـــو$_م$ (س – ص) ≠ لـــو$_م$ س – لـــو$_م$ ص

، لـــو$_م$ (س ÷ ص) ≠ لـــو$_م$ س ÷ لـــو$_م$ ص

٣ ـ خاصية لوغاريتم القوة :

لـــو$_م$ س^ن = ن لـــو$_م$ س

فمثلا : لـــو$_م$ ٩ = لـــو$_م$ ٣^٢ = ٢ لـــو$_م$ ٣ ، لـــو$_ب$ ٨ = لـــو$_ب$ ٢^٣ = ٣ لـــو ٢

٤ ـ لـــو$_س$ س = ١

فمثلا : لـــو$_٦$ ٦ = ١ ، لـــو$_٧$ ٧ = ١ ، لـــو$_٨$ ٨ = ١

٥ ـ لـــو$_م$ ١ = صفر

فمثلا : لـــو$_٤$ ١ = صفر ، لـــو$_٧$ ١ = صفر

٦ـ خاصية تغير الأساس : لـو$_ص$ س = $\frac{\text{لو}_م \text{س}}{\text{لو}_م \text{ص}}$

فمثلا : لـو$_٤$ ٨ = $\frac{\text{لو}_م ٨}{\text{لو}_م ٤}$ = $\frac{\text{لو}_م ٢^٣}{\text{لو}_م ٢^٢}$ = $\frac{٣ \text{ لو}_م ٢}{٢ \text{ لو}_م ٢}$ = $\frac{٣}{٢}$

٧ـ خاصية المعكوس الضربى : لـو$_م$ ب = $\frac{١}{\text{لو}_ب م}$ حيث لو$_م$ب × لو$_ب$ م = ١

فمثلا : لـو$_٣$ ٧ × لـو$_٧$ ٣ = لـو$_٣$ ٧ × $\frac{١}{\text{لو}_٣ ٧}$ = ١

مثال : أوجد فى أبسط صورة ١) لـو$_٥$ $\sqrt[٤]{١٢٥}$ ٢) لـو$_٣$ $\sqrt[٧]{٢٤٣}$ ٣) لـو ٣٠ ـ لـو ٣

الحل : ١) لـو$_٥$ $\sqrt[٤]{١٢٥}$ = لـو$_٥$ $(٥^٣)^{\frac{١}{٤}}$ = لـو$_٥$ $(٥)^{\frac{٣}{٤}}$ = $\frac{٣}{٤}$ لـو$_٥$ ٥ = $\frac{٣}{٤}$

٢) لـو$_٣$ $\sqrt[٧]{٢٤٣}$ = لـو$_٣$ $(٣^٥)^{\frac{١}{٧}}$ = لـو$_٣$ $(٣)^{\frac{٥}{٧}}$ = $\frac{٥}{٧}$ لـو$_٣$ ٣ = $\frac{٥}{٧}$

٣) لـو ٣٠ ـ لـو ٣ = لـو $\frac{٣٠}{٣}$ = لـو ١٠ = ١

مثال : أوجد قيمة لـو$_{٣}$ ١٥ فى أبسط صورة إذا كان لـو$_{٣}$ ٥ $\simeq$ ١.٤٦٥

الحل : لـو$_{٣}$ ١٥ = لـو $_{٣}$ ٥ × ٣ = لـو$_{٣}$ ٥ + لـو$_{٣}$ ٣ = ١.٤٦٥ + ١ = ٢.٤٦٥

مثال : اختصر لابسط صورة : ٢ لو ٢٥ + لو ($\frac{١}{٣}$ + $\frac{١}{٥}$) + ٢ لو ٣ − لو ٣٠

الحل : المقدار = لو (٢٥)^{٢} + لو $\frac{٨}{١٥}$ + لو ٣ ^{٢} − لو ٣٠

= لو (٢٥)^{٢} × $\frac{٨}{١٥}$ × ٩ × $\frac{١}{٣٠}$ = لو ١٠٠

= ٢ لو ١٠ = ٢

نجعل الطرف الأيمن به " لـو " واحد فقط باستخدام القوانين

مثال : اختصر: لو$_{٥}$ ٤٩ × لو$_{٨}$ ٥ × لو$_{٩}$ ٨ × لو$_{٧}$ ٩

الحل : المقدار = $\frac{\text{لو ٤٩}}{\text{لو ٥}}$ × $\frac{\text{لو ٥}}{\text{لو ٨}}$ × $\frac{\text{لو ٨}}{\text{لو ٩}}$ × $\frac{\text{لو ٩}}{\text{لو ٧}}$ = $\frac{\text{لو ٤٩}}{\text{لو ٧}}$ = $\frac{\text{٢لو ٧}}{\text{لو ٧}}$ = ٢

مثال : أثبت أن $\frac{\text{لو ٧٢٩ − لو ٦٤}}{\text{لو ٩ − لو ٤}}$ = ٣

الحل : الايمن = لو $\frac{٧٢٩}{٦٤}$ ÷ لو $\frac{٩}{٤}$ = لو ($\frac{٣}{٢}$) ^{٦} ÷ لو ($\frac{٣}{٢}$) ^{٢}

= ٦ لو $\frac{٣}{٢}$ ÷ ٢ لو $\frac{٣}{٢}$ = ٣ = الايسر

مثال : إذا كان : ٣ لـو س + ٤ لـو ص − لـو س ص ^{٢} = ٢ (لـو ٢ + لـو ٣)

اثبت أن : س ص = ٦   [بنفس المعطى فى سؤال أخر يطلب قيمة س ص]

الحل :

٣ لـو س + ٤ لـو ص − لـو س ص ^{٢} = ٢ لـو ٢ + ٢ لـو ٣

لـو س^{٣} + لـو ص^{٤} − لـو س ص ^{٢} = لـو(٢)^{٢} + لـو(٣) ^{٢}

لـو $\frac{\text{س}^{٣} \times \text{ص}^{٤}}{\text{س} \times \text{ص}^{٢}}$ = لـو ٤ + لـو ٩ = لـو ٤ × ٩

لـو س^{٢} ص^{٢} = لـو ٣٦   ∴ س^{٢} ص^{٢} = ٣٦   ∴ س ص = ٦

مثال : إذا كان س^{٢} + ص^{٢} = ٨ س ص أثبت أن ٢ لو (س+ص) = ١ + لو س + لو ص

الحل: ∵ س^{٢} + ص^{٢} = ٨ س ص   باضافة ٢ س ص للطرفين

∴ س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢} = ٨ س ص + ٢ س ص

∴ (س + ص)^{٢} = ١٠ س ص   بأخذ لوغاريتم الطرفين

∴ لو (س + ص)^{٢} = لو ١٠ س ص

∴ ٢ لو (س + ص) = لو ١٠ + لو س + لو ص = ١ + لو س + لو ص

مثال : إذا كان س ص = ٤ $\sqrt{٢}$ أوجد قيمة المقدار ٥ لو$_{٢}$ س + ٤ لو$_{٢}$ ص − لو$_{٢}$ س^{٣} ص^{٢}

الحل :

المقدار = لو$_{٢}$ $\frac{\text{س}^{٥} \times \text{ص}^{٤}}{\text{س}^{٣} \times \text{ص}^{٢}}$ = لو$_{٢}$ س^{٢} ص^{٢} = لو$_{٢}$ (س ص)^{٢}

= لو$_{٢}$ (٤ $\sqrt{٢}$)^{٢} = لو$_{٢}$ ٣٢ = لو$_{٢}$ ٢^{٥} = ٥ لو$_{٢}$ ٢ = ٥ × ١ = ٥

مثال : إثبت أن : لو$_{٢}$ لو$_{٤}$ لو$_{٨}$ ٦٤ = - ١

الحل : المقدار = لو$_{٢}$ لو$_{٤}$ لو$_{٨}$ ٨^{٢} = لو$_{٢}$ لو$_{٤}$ ٢ لو$_{٨}$ ٨

= لو$_{٢}$ لو$_{٤}$ (٤)$^{\frac{١}{٢}}$ = لو$_{٢}$ $\frac{١}{٢}$ لو$_{٤}$ ٤

= لو$_{٢}$ $\frac{١}{٢}$ = لو$_{٢}$ ٢$^{-١}$ = -١ لو$_{٢}$ ٢ = - ١

مثال : أوجد قيمة س التى تحقق أن لو س = $\frac{(\text{لو}٥)^{٢} - \text{لو}١٢٥}{\text{لو } ٠.٠٠٥}$

الحل :

∵ لو س = $\frac{(\text{لو}٥)^{٢} - \text{لو}٥^{٣}}{\text{لو } ٥ - \text{لو } ١٠٠٠}$ ∴ لو س = $\frac{(\text{لو}٥)^{٢} - ٣\ \text{لو}٥}{\text{لو } ٥ - ٣}$

∵ لو س = $\frac{\text{لو}٥\ [\ \text{لو}٥ - ٣\ ]}{\text{لو } ٥ - ٣}$ ∴ لو س = لو ٥   ∴ س = ٥

* حل المعادلات اللوغاريتمية:

مثال :أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية :

١) ٢ لـو س ـ لـو (٢ س + ٣) = ٠

٢) لـو $_{٣}$ (س – ١) + لـو $_{٣}$ (س + ١) = ٣ لـو $_{٣}$ ٢

٣) (لـو س) ^{٢} – لـو س^{٣} = ٤

٤) لو (س + ٢) + لو (س – ٢) = ١ – لو ٢

٥) لو$_{٣}$ س + لو$_{س}$ ٣ = ٢

ملاحظة :
بالتعويض
عن قيمة س فى المعادلة الأصلية
لمعرفة ما إذا كان يمكن قبول هذا
العدد أم رفضه حيث لا يوجد
لوغاريتم لعدد سالب

الحل :

١) ∵ ٢ لـو س ـ لـو (٢ س + ٣) = ٠

∴ ٢ لـو س = لـو (٢ س + ٣)

∴ لـو س^{٢} = لـو (٢ س + ٣)

∴ س ^{٢} = ٢ س + ٣

∴ س ^{٢} – ٢ س – ٣ = ٠

∴ (س – ٣) (س + ١) = ٠

∴ س = ٣ ، س = - ١ مرفوض

∴ م . ح = {٣ }

تذكر دائما أننا نجعل كل طرف به " لـو " واحد لنتمكن من الحل و هنا نتخلص من " لـو " بالتحويل الى الصورة الأسية

٢) لـو $_{٣}$ (س – ١) + لـو $_{٣}$ (س + ١) = ٣ لـو $_{٣}$ ٢

∴ لـو$_{٣}$ (س – ١)(س + ١) = لـو$_{٣}$ ٢ ^{٣}

∴ لـو$_{٣}$ (س^{٢} ـ ١) = لـو $_{٣}$ ٨

∴ س^{٢} – ١ = ٨ 　∴ س^{٢} = ٩

∴ س = ٣ ، س = - ٣ مرفوض

∴ م . ح = { ٣ }

تذكر دائما إذا وجدنا (لوغاريتم)^{٢} اعلم أننا سوف نستخدم التحليل لنتمكن من حل السؤال

٣) ∵ (لـو س) ^{٢} – لـو س^{٣} = ٤

∴ (لـو س) ^{٢} – ٣ لـو س – ٤ = ٠

∴ (لـو س – ٤) (لـو س + ١) = ٠

∴ لـو س = ٤ منها س = ١٠^٤ = ١٠٠٠٠

، لـو س = ـ ١ منها س = ١٠^-١ = ٠.١

∴ مجموعة الحل = { ١٠٠٠٠ ، ٠.١ }

٤) ∵ لو (س + ٢) + لو (س – ٢) = ١ – لو ٢

∴ لـو (س + ٢) (س ـ ٢) = لـو ١٠ ـ لـو ٢

∴ لـو (س^٢ ـ ٤) = لـو ١٠/٢ = لـو ٥ ∴ س^٢ ـ ٤ = ٥ ∴ س^٢ = ٩

∴ س = ٣ ، س = ـ ٣ مرفوض ∴ م . ح = { ٣ }

٥) ∵ لو ٣ س + لوس ٣ = ٢ ∴ لو٣ س + ١/لـو٣ س = ٢ بالضرب فى لو٣ س

∴ (لو٣ س)^٢ + ١ = ٢ لو٣ س ∴ (لو٣ س)^٢ ـ ٢ لوس + ١ = ٠

∴ (لو ٣ س ـ ١) (لو ٣ س ـ ١) = ٠

∴ لو ٣ س = ١ ∴ س = ٣ ∋ المجال

∴ م . ح = { ٣ }

مثال : حل المعادلة لو ∛(٣ س -١) + لـو ∛(س - ٢) = لـو٢

الحل :

∴ لـــو ∛((٣ س - ١)(س – ٢)) = لو ٢

∴ (٣ س – ١)^(١/٣) (س – ٢)^(١/٣) = ٢ بالتكعيب

∴ (٣ س – ١) (س – ٢) = ٨ ∴ ٣س^٢ – ٧ س +٢ = ٨

∴ ٣ س^٢ – ٧ س – ٦ = ٠ ∴ (٣س +٢) (س – ٣) = ٠

∴ س = -٢/٣ ، س = ٣

∴ م . ح = { -٢/٣ ، ٣ }

*** حل المعادلات الأسية باستخدام اللوغاريتمات :**

مثال : إذا كانت س = لــو ٥ ÷ لــو ٣ فاوجد قيمة المقدار $٩^{س} - ٣^{س+١} + ٢$

الحل :

∵ س = $\frac{لــو ٥}{لــو ٣}$ ∴ س لــو ٣ = لــو ٥ ∴ لــو $٣^{س}$ = لــو ٥ ∴ $٣^{س} = ٥$

∴ المقدار = $٩^{س} - ٣^{س+١} + ٢ = (٣^{٢})^{س} - ٣^{س} × ٣ + ٢$

$= (٣^{س})^{٢} - ٣^{س} × ٣ + ٢ = (٥)^{٢} - ٥ × ٣ + ٢ = ٢٥ - ١٥ + ٢ = ١٢$

مثال : أوجد قيمة س إذا كان : لو س = ـ ٠.٠٠٧٥

الحل:

خطوات الآلة : shift log (10^{x}) – 0 . 0 0 7 5 =

نجد أن : س = ٠ . ٩٢٨٩

مثال: اوجد مجموعة حل المعادلة : $(٨)^{س+١} = (٩)^{س-٢}$

تذكر دائما أننا نأخذ " لــو " الطرفين فى المعادلات التى يصعب أن نجعل فيها الأساس = الأساس و المعادلات الاسية

الحل :

بأخذ اللوغاريتم للطرفين نجد أن

لـــــو $(٨)^{س+١}$ = لـــــو $(٩)^{س-٢}$

(س + ١) لـــــو ٨ = (س ـ ٢) لـــــو ٩

س لـــــو ٨ + لـــــو ٨ = س لـــــو ٩ ـ ٢لــو ٩

س لـــــو ٨ ـ س لـــــو ٩ = ـ لـــــو ٨ ـ ٢لــو ٩

س (لــو ٨ ـ لــو ٩) = ـ لــو ٨ ـ ٢لــو ٩

س = $\frac{- لـــــو ٨ - ٢لـــــو ٩}{لـــــو ٨ - لـــــو ٩}$

باستخدام الآلة الحاسبة من اليسار إلى اليمين كالآتي :

(- log 8 – log 9) = ÷ (- 2 log 9 – log 8)

∴ س = ٥٤.٩٦٤٥

مثال: إذا كان : $٢ \times ٥^{ص} = ٥ \times ٢^{ص+٢}$ فاوجد قيمة ص لأقرب رقم عشرى

الحل:

بأخذ اللوغاريتم للطرفين نجد أن :

لو (٢×٥^{ص}) = لو $(٥ \times ٢^{ص+٢})$

لو ٢ + لو $٥^{ص}$ = لو ٥ + لو $٢^{ص+٢}$

لو ٢ + ص لو ٥ = لو ٥ + (ص + ٢) لو ٢

لو ٢ + ص لو ٥ = لو ٥ + ص لو ٢ + ٢لو ٢

ص لو ٥ – ص لو ٢ = لو ٥ + ٢ لو ٢ – لو ٢

ص (لو ٥ – لو ٢) = لو ٥ + لو ٢

ص = $\frac{\text{لو ٥ + لو ٢}}{\text{لو ٥ – لو ٢}}$

(log 5 – log 2) = ÷ (log 5 + log 2)

ص = ٢.٥

مثال : أوجد قيمة س حيث $٥^{٢س+١} = ٧ \times ٣^{س+٢}$

الحل :

بأخّذ لوغاريتم الطرفين

∵ لو $٥^{٢س+١}$ = لو $٧ \times ٣^{س+٢}$ ∴ لو $٥^{٢س+١}$ = لو ٧ + لو $٣^{س+٢}$

∴ (٢س+١)لو٥ = لو٧ + (س+٢)لو٣ ∴ ٢س لو٥+ لو٥ = لو٧ + س لو٣ + ٢لو٣

٢س لو٥ – س لو٣ = لو٧ +٢لو٣ – لو٥ ∴ س (٢لو٥ – لو ٣) = لو٧ +٢ لو ٣ – لو٥

س = $\frac{\text{لو ٧ + ٢ لو٣ – لو٥}}{\text{٢لو٥ – لو٣}}$ = ١.١٩

مثال : أوجد قيمة س التى تحقق أن : $٨^{٢س+١} \times ٩^{س+٢} = ٢٧$

الحل :

بأخذ لوغاريتم الطرفين

∴ لو $٨^{٢س+١} \times ٩^{س+٢}$ = لو ٢٧ ∴ لو $٨^{٢س+١}$ + لو $٩^{س+٢}$ = لو ٢٧

اعداد الاستاذ / خالد المنفلوطى معلم خبير رياضيات ت / ٠١١١٥٤٨٠٢٨١١

∴ (٢س+١) لو٨ +(س+٢) لو٩ = لو٢٧ 　　∴٢س لو٨ + لو٨ +س لو٩+٢لو٩ = لو٢٧

∴ ٢س لو ٨ + س لو ٩ = لو٢٧ – ٢لو ٩ – لو٨

∴ س (٢لو٨ + لو٩) = لو٢٧ – ٢لو ٩ – لو٨

∴ $س = \frac{\text{لو٢٧ – ٢ لو٩ – لو٨}}{\text{٢ لو٨ + لو٩}} = -٠.٥$

مثال : أوجد قيمة س التى تحقق أن : $٢^{٢س} - ٨ \times ٢^{س} + ١٥ = ٠$

الحل:

$(٢^{س} - ٣)(٢^{س} - ٥) = ٠$

$٢^{س} = ٣$

بأخذ لو الطرفين

$\text{لو } ٢^{س} = \text{لو}٣$

س لو ٢ = لو٣

$س = \frac{\text{لو}٣}{\text{لو}٢}$

= ١.٦

$٢^{س} = ٥$

بأخذ لو الطرفين

$\text{لو}٢^{س} = \text{لو}٥$

س لو٢ = لو٥

$س = \frac{\text{لو}٥}{\text{لو}٢}$

= ٢.٣

تمارين على خواص اللوغاريتمات

(١) بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة

(أ) لو ١٠٠٠ 　(ب) $\text{لو}_{٢}\ ٣٢$ 　(جـ) $\text{لو}_{\frac{١}{٤}}\ ١٦$ 　(د) $\text{لو}_{٧}\ ٤٩$

(هـ) لو ٠,٠٠١ 　(و) $\text{لو}_{٨}\ ٢$ 　(ز) $\text{لو}_{٨}\ ١$ 　(ح) $\text{لو}_{ص}\ \sqrt{ص}$

(٢) اختصر لأبسط صورة

(أ) لو٢ + لو٥ 　(ب) $\text{لو}_{٥}\ ١٥ - \text{لو}_{٥}\ ٣$ 　(جـ) $\frac{\text{لو}٢٥}{\text{لو}٥}$

(د) $\text{لو}_{٢}\ ٥ \times \text{لو}_{٥}\ ٢$ 　(هـ) لو ٥٤ - ٣ لو٣ - لو٢ 　(و) ١ + لو٣ - لو٢ - لو١٥

(ز) $\text{لو}_{\text{ابجـ}}\ ا + \text{لو}_{\text{ابجـ}}\ ب + \text{لو}_{\text{ابجـ}}\ جـ$ 　(ح) $\frac{١}{\text{لو}_{٢}\ ١٢} + \frac{١}{\text{لو}_{٨}\ ١٢} + \frac{١}{\text{لو}_{٩}\ ١٢}$

(٣) علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (✗) أمام العبارة الخطأ، حيث س ، ص ∈ $ح_+$ ،أ، ب ∈ $ح_+$ - {١}:

(أ) $لو_أ$ (س + ص) = $لو_أ$ س + $لو_أ$ ص　(　)　　(ب) $لو_أ$ (س + ص) = $لو_أ$ س × $لو_أ$ ص　(　)

(جـ) $لو_أ$ (س ص) = $لو_أ$ س + $لو_أ$ ص　(　)　　(د) $لو ٢س^٥ = ٥لو٢س$　(　)

(هـ) $لو_أ (\frac{س}{ص}) = لو_أ س + لو_أ ص^{-١}$　(　)　　(و) $\frac{لو س}{لو_أ ص} = \frac{لو_ب س}{لو_ب ص}$ حيث أ، ب ∈ $ح_+${١}　(　)

(ز) إذا كان س < صفر فإن $لو_أ س^٤ = ٤لو_أ س$ ، أ ∈ ح -{١}　(　)

(٤) إذا كان لو٢ = س، لو٣ = ص أوجد بدلالة س ، ص كل من: لو٦　،　$لو_{١٨}$ ١٢

(٥) أوجد قيمة س فى كل مما يأتى مقربًا الناتج لرقمين عشريين.

(أ) $٧^{٣س-٢} = ٥$　(ب) $٧^{س+١} = ٣^{س-٢}$　(جـ) $\frac{٥}{١٠^{٢س}} = ٧$　(د) $\frac{٥}{٣^{س}} = ٥١٣$

(٦) أوجد فى ح مجموعة حل كلٍّ من المعادلات الآتية:

(أ) $لو_٤ س = ١ - لو_٤ (س - ٣)$　(ب) $لو_٣ (س + ٦) = ٢ لو_٣ س$　(جـ) لو (س + ٨) - لو (س - ١) = ١

(د) $(لو س)^٢ - لو س^٢ = ٣$　(هـ) $س^{لو س} = ١٠٠س$　(و) $٣^{لو س} = ٢^{لو ٣}$

(ز) $لو_٣ س = لو_س ٣$　(ح) $لو_٢ س + لو_س ٢ = ٢$　(ط) $لو_٢ (٢^{س} - ٤) + س - ٥ = صفر$

(٧) استخدم الحاسبة فى إيجاد قيمة كل من:

(أ) لو ٣,١٥　(ب) $لو_٢ ٢٥$　(جـ) ٢ لو ٥ - ٣ لو ٧

(٨) إذا كان س = ٥ + ٢ $\sqrt{٦}$ أوجد فى أبسط صورة قيمة لو $(\frac{١}{س} + س)$

(٩) إذا كان س ص = ٤ $\sqrt{٢}$ أوجد قيمة المقدار ٥ $لو_٢$ س + ٤ $لو_٢$ ص – $لو_٢ س^٣ ص^٢$

تمارين متنوعة على اللوغاريتمات :

[١] أوجد قيمــة كل من : ـ

١) لو$_{٥}$ ٤٠ − لو$_{٥}$ ١٦ + لو$_{٥}$ ١٠

٢) لو$_{٤}$ ٢ + لو$_{٤}$ ٥٦ − لو$_{٤}$ ٤٢ + لو$_{٤}$ ٢٤

٣) ٣ لو $\frac{٥}{٣}$ - ٢ لو $\frac{٥}{٧}$ - ٤ لو $\frac{١}{٣}$ - لو $٧٣\frac{١}{٢}$

٤) لو$_{٢}$ لو$_{٤}$ لو$_{٥}$ ٢٥

[٢] إثبــت أن : ـ

١) لو$_{٢}$ $\frac{٤٠}{١٣}$ - لو$_{٢}$ $\frac{٧}{١٢}$ + لو $\frac{٩١}{٦٠}$ = لو$_{٣}$ ٢٧

٢) لو ٠.٧٥ + لو١٢ − ٢ لو٠.٣ = لو$_{٦}$ ٣٦

٣) $\frac{١ + لو ٢ - لو ٤٥}{١ - لو ١٥} = ٢$

٤) س = $\frac{٦}{ص}$ إذا كان ٧ لوس + ٤ لوص − لو س^{٥} ص^{٢} = ٢ (لو٢ + لو٣)

٥) لو$_{ص^{٢}}$ س^{٢} = لو$_{ص}$ س ثم إثبت أن: لو$_{ص}$ س^{٣} + لو$_{ص^{٢}}$ س^{٦} = ٦ لو$_{ص}$ س

[٣] أوجد قيمــة س فيما يلى :

١) لوس + لو٤.٩ = لو٣٥ − لو١٢٥ + لو١٧٥

٢) لو$_{٢}$ س = لو $\frac{٣}{٤}$ + لو ١٢ - ٢ لو ٠.٣

٣) لو(س − ١) + لو (س + ١) = لو ٨

٤) لو (س^{٢} + ٩ س) = ١

اعداد الاستاذ / خالد المنفلوطى	معلم خبير رياضيات	ت / ٠١١٥٤٨٠٢٨١١

[٤] أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية :

١) لــو٢ س + لـــو٢ (س -٢) = ٣
٢) (لـو٣ س) ٢ + ٢ لـو٣ س = ٨

٣) (لـــو س)٣ = لـــو س٤
٤) لو٣ س + $\frac{٣}{\text{لو٣ س}}$ = ٤

٥) لـو٣ | س + ١ | = ٢
٦) ٢ ^(لـوس)٢^ × ٦٤ ^(لـوس)^ = ٣٢

٧) ٥ ^٢ س – ٣^ = ٣ ^س + ٤^
٨) ٢ ^٢س^ – ٨ × ٢ ^س^ + ١٥ = ٠

٩) س = لو٣ (ظا $\frac{ط}{٣}$)
١٠) لو٣لـو٢ (س٢ – ١٧) = ١

[٥] أوجد قيمة س لأقرب رقمين عشريين فى كل مما يأتى :

١) إذا كان ٥ ^س^ = ١٧
٢) إذا كان (١٨) ^٣س – ٥^ = ٧.١٢

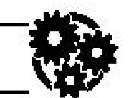
٣) إذا كان ٨ ^س + ١^ = ٩ ^س – ٢^
٤) ٥ ^س – ١^ = (٦ ^س^ ÷ ٣٦)

[٦] بإستخدام حاسبة الجيب أوجد قيم س مقربا الناتج لرقم عشرى :

١) ٢ ^٢س^ – ١٠ × ٢ ^س^ + ٢٤ = ٠
٢) ٣ × ٥ ^٢س + ١^ = ٢٥ × ٩ ^س + ١^
٣) س = ٢ لـــو ٧ – ٣ لـــو٢
٤) إذا كان د(س) = ٣ ^س^ ، د(س) + د(س – ٢) = ٢٠٠

[٧] إذا كان حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ ط نق٣ أوجد طول نصف قطر الكرة التى حجمها = ٩٠٤.٣٢ سم٣
متخذا ط = ٣.١٤ لقرب سم

[٨] إذا كان $\frac{\text{لـــو س}}{\text{لـــو ٥}} = \frac{\text{لـــو٩}}{\text{لـــو ٣}} = \frac{\text{لـــو٤٩}}{\text{لـــوص}}$ أوجد قيمتى س ، ص

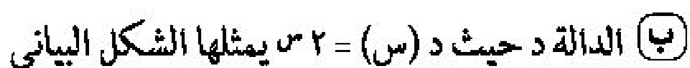


تمارين عامة

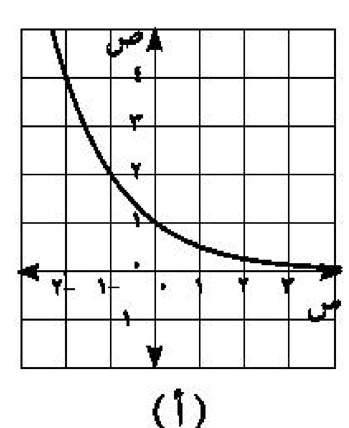
① اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

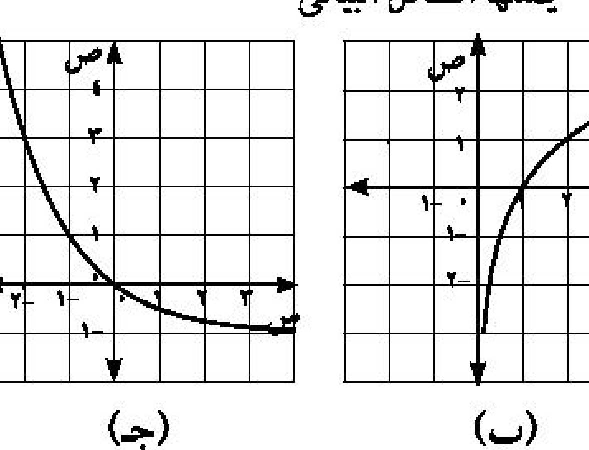
(أ) إذا كان $٣^{س} = ٥$ فإن س =

(أ) ٢   (ب) $\text{لو}_{٣}\ ٥$ (جـ) $\text{لو}_{٥}\ ٣$ (د) $\frac{٥}{٣}$



(ب) الدالة د حيث د (س) = $٢^{س}$ يمثلها الشكل البيانى





(أ)   (ب)   (جـ)   (د)

(جـ) $\text{لو}_{٢٧}\ ٨١ =$

(أ) ٤   (ب) ٨   (جـ) -٤   (د) $\frac{٣٢}{٣}$

(د) $\frac{أ^{س+٢} + أ^{س+١} + أ^{س}}{أ^{س+١} + أ^{س} + أ^{س-١}} =$

(أ) أ   (ب) أ-١   (جـ) أس   (د) ١

(هـ) الشكل المقابل يمثل الدالة د حيث

(أ) د(س) = $٢^{س+١}$ (ب) د (س) = $٢^{-س}$

(جـ) د (س) = $٣^{-س}$ (د) د (س) = $٢^{س}$



(و) أى مما يأتى يكافئ $\frac{٢\ \text{لو}\ ٧}{\text{لو}\ ٧ + \text{لو}\ ٦}$ ؟

(أ) $\frac{\text{لو}\ ٧}{\text{لو}\ ٦}$ (ب) $\frac{\text{لو}\ ٤٩}{\text{لو}\ ٤٢}$ (جـ) $\frac{٢}{\text{لو}\ ٦}$ (د) $\text{لو}\ \frac{٧}{٦}$

(ز) إذا كان لو$_{٢}$ (س - ٤) = ٤ فإن س =

(أ) ٤ (ب) ٢٠ (جـ) ١٦ (د) ١٨

(ح) لو ٠,٠١ =

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) -١ (د) -٢

(ط) إذا كان منحنى ص = لو$_{٤}$ (١ - أ س) يمر بالنقطة ($\frac{١}{٤}$ ، - $\frac{١}{٢}$) فإن أ =

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٨

(٢) أوجد مجموعة حل المعادلات

(أ) ٥$^{س-٢}$ = $\frac{١}{١٢٥}$ (ب) ($\sqrt{٣}$)$^{س-٤}$ = ١ (جـ) ٧$^{س-٢}$ = ٥$^{س-٢}$

(د) س$^{\frac{٢}{٣}}$ = ٤ (هـ) س$^{لو س}$ = ١٠ (و) $\sqrt{لو_{٢} س}$ = لو$_{٢}$ $\sqrt{س}$

(ز) لو$_{٢}$ س + لو$_{٤}$ س = - $\frac{٣}{٢}$ (ح) لو (س + ٣) - لو (س + ٢) = ١

(٣) اكمل ما يأتى:

(أ) إذا كان ٢^{س} = ٥ فإن ٤^{س} = ...

(ب) مجال الدالة د حيث د (س) = ٣^{س} هو .... ومداها هو ....

(جـ) مجال الدالة د حيث د (س) = لو$_{٢}$ س هو .... ومداها هو ....

(د) لو$_{٣}$ ٥ × لو$_{٥}$ ٣ = ...

(هـ) منحنى الدالة ص = لو$_{٢}$ (٣ - س) يقطع محور السينات فى النقطة ....

(و) إذا كان لو$_{٢}$ س = ٤ فإن س = ...

(٥) مثِّل بيانيًّا كلًّا من الدوال

(أ) د (س) = $(\frac{٣}{٢})^{س}$ (ب) د (س) = لو$_{٢}$ (س + ١)

(٦) أوجد محيط كل من الأشكال الآتية فى أبسط صورة:

لو$_{٦}$ ٨ لو$_{٦}$ ٢٧

لو$_{\sqrt{١٠}}$ ٤ لو$_{\sqrt{١٠}}$ ٥

اختبار تراكمى

① أوجد قيمة كل من:

(أ) $(-٣٢)^{\frac{٢}{٥}}$ (ب) $\sqrt[٤]{١٦^{-٣}}$ (جـ) $لو_{٠,٠٩} (٠,٣)^{-٢}$

② اختصر لأبسط صورة:

(أ) $\frac{٢٥^{س} \times ٤^{س}}{١٠^{٢س-١}}$ (ب) $\frac{٥ \times ٣^{٢ن} - ٤ \times ٣^{٢ن-١}}{٢ \times ٣^{٢ن+١} - ٣^{٢ن}}$ (جـ) $لو_{٦} ٤ + ٢ لو_{٦} ٣$

③ أوجد مجموعة حل المعادلة:

(أ) $٢^{س} = ١٠$ مقربًا الناتج لأقرب رقم عشرى. (ب) $لو_{٥} س + لو_{٥} ٣ = ٢$

(جـ) $٢^{س} - ٢^{س+١} + ٢^{س-١} = -١$ (د) $س^{\frac{١٠}{٣}} - ٣٣ س^{\frac{٥}{٣}} + ٣٢ =$ صفر

④ اختر الاجابة الصحيحة :

(أ) العدد $٢^{٢٤} + ٢^{٢٣} + ٢^{٢٢}$ يقبل القسمة على ....

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ٩

(ب) إذا كان لو(س + ١١) = ٢ فإن س = ...

(أ) -٩ (ب) ٢٢ (جـ) ٨٩ (د) ٩١

(جـ) مجموع جذور المعادلة $س^{٤} = ١٦$ يساوى ....

(أ) ٢ (ب) -٢ (جـ) ± ٢ (د) صفر

(د) لو (حتا θ) + لو (قا θ) = ... حيث $\theta \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$

(أ) أ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) -١

⑤ إذا كان لو(س + ص) = $\frac{١}{٢}$ (لو س + لو ص) + لو ٢ أثبت أن س = ص.